Évaluation n° 05 Suites (1) Fondements

janvier 2024
durée ≈ 1h 15min

Cochez les 3 premières lettres de votre nom et prénom et complétez l'encadré. ○A ○B ○C ○D ○E ○F ○G ○H ○I ○J ○K ○L ○M ○N ○O ○P ○Q ○R ○S ○T ○U ○V ○W ○X ○Y ○Z

Nom et prénom :

Consignes

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le total des points est 25.

Coloriez les cases	
correct	incorrect
•	✓ ⊙ ⊕ ⊗

Vous devez colorier les cases au stylo *bleu* ou *noir* pour répondre aux questions. En cas d'erreur, effacez au « blanco » *sans redessiner la case.*

Toute action volontaire rendant impossible ou difficile l'identification ou la correction de la copie engendre une dégradation de la note finale.

Pour les questions ouvertes, *tous les calculs seront justifiés* et *la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Respect des consignes ○ -1 ○ $-0{,}5$ ○ 0 **Réservé**

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{2n+1}$.

1. Déterminer les valeurs u_0, u_1, u_2. Montrer les calculs.

2. Est-il possible de déterminer directement u_{25} ? Justifier votre réponse.

3. Par la méthode de votre choix, donner u_{100}.

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 ○2 ○2.5 ○3 ○3.5 **Réservé**

Exercice 2

On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = -1$ et pour tout $n > 1$, $\quad v_n = 2(5 - 2v_{n-1})$

1. Calculer v_2 , v_3 et v_4 . Montrer les calculs.
2. Est-il possible de déterminer directement v_{25} ? Justifier votre réponse.
3. Par la méthode de votre choix, donner v_{10}.

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 ○2 ○2.5 ○3 ○3.5 **Réservé**

Exercice 3

Soit (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = n^2 - 16n - 2$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer a_{n+1} en fonction de n.
2. Montrer que $a_{n+1} - a_n = 2n - 15$.
3. À l'aide du calcul précédent, justifier le sens de variation de (a_n). Vous préciserez le rang N à partir duquel la suite est monotone.

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 ○2 ○2.5 ○3 **Réservé**

Exercice 4

On considère la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer b_{n+1} en fonction de n
2. En déduire que $b_{n+1} - b_n = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
3. Justifier le sens de variation de la suite (b_n).

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 ○2 ○2.5 ○3 **Réservé**

Exercice 5

On considère la suite (c_n) positive définie pour tout entier naturel n par $c_n = \dfrac{0{,}4^n}{5}$.

Soit n un entier naturel. Déterminer $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ et en déduire le sens de variation de la suite (c_n).

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 **Réservé**

Exercice 6

Soit un réel k. On considère la suite (u_n) vérifiant pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_{n+1} = ku_n + 5$.

Sachant que $u_1 = 2$, exprimer u_2 et u_3 en fonction de k.

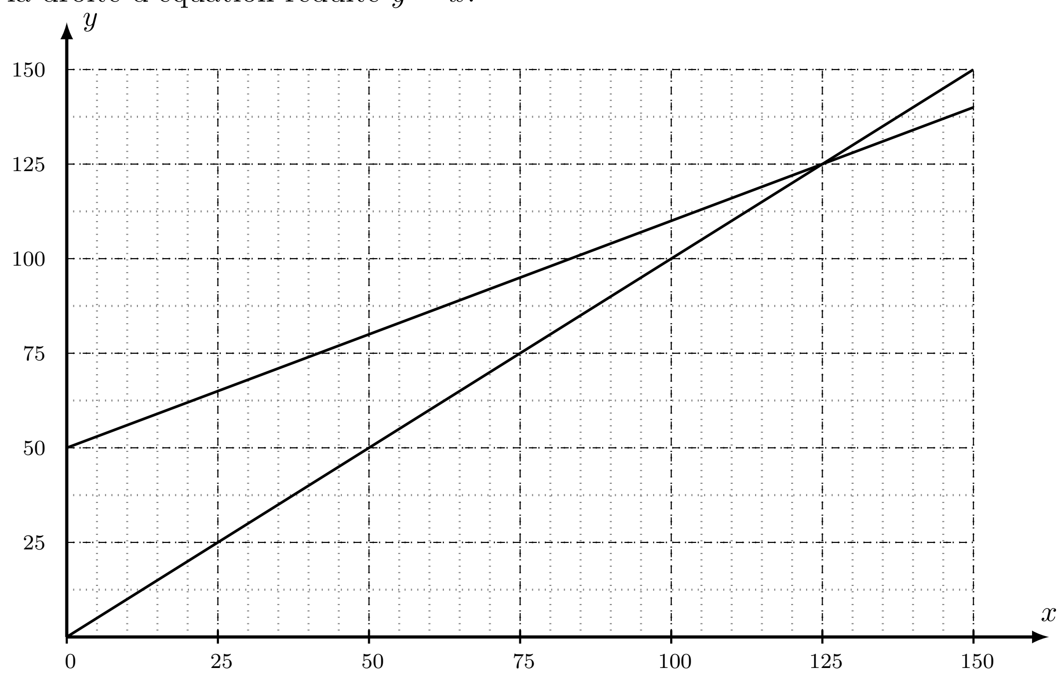
○0 ○0.5 ○1 **Réservé**

Exercice 7

À compter du jour 0, un patient prend 50 mg d'un ingrédient actif chaque matin. On sait que le corps élimine 40% de cet ingrédient chaque 24 h.

On note A_n la quantité en mg d'ingrédient actif présent dans le corps au jour n immédiatement après la prise de médicament.

1. Donner A_0.
2. Justifier que pour tout $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = 0{,}6A_n + 50$.
3. On a tracé ci-dessous la droite représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}6x + 50$, ainsi que la droite d'équation réduite $y = x$.



   Construire le diagramme en escalier de la suite (A_n) en plaçant les termes successifs de A_0 à A_3 sur l'axe des abscisses (sans les calculer).
4. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (A_n).
5. Quel est la quantité d'ingrédient actif accumulée dans le corps après une utilisation prolongée ?

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 ○2 ○2.5 ○3 ○3.5 ○4 ○4.5 **Réservé**

Vu Réservé

Exercice 8

On souhaite déterminer par itération une valeur approchée de la solution positive de l'équation

$$x(x+1) = 15$$

Pour cela, on considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{15}{u_n + 1} \end{cases}$.

1. Compléter les lignes 1, 2 et 3 de l'algorithme Python ci-dessous permettant de calculer et d'afficher les valeurs de u_1 à u_{100}.

```
1 u = ...
2 for n in range(1,.....) :
3     u = ...
4     print("u({})={}".format(n,u))   #affiche u(<valeur de n>)=<valeur de u>
```

2. Conjecturer par la méthode de votre choix, la limite x^* de la suite (u_n). Vous donnerez une valeur approchée à 10^{-3} de la limite.

3. Un terme u_n est assez proche de la solution x^* recherchée lorsque $u_n(u_n+1) \approx 15 \pm 0{,}001$.

   Compléter les lignes 2, 3 et 4 du script ci-dessous pour qu'il affiche le premier rang n_0 de la suite qui vérifie $|u_n(u_n+1) - 15| \leqslant 0{,}001$

```
1 n = 0
2 u = ...
3 while abs(..............)...0.001 : #l'instruction abs(x) retourne |x|
4     u = ...
5     n = n+ 1
6 print("n_0={}".format(n))
```

4. Déterminer n_0 par la méthode de votre choix.

○0 ○0.5 ○1 ○1.5 ○2 ○2.5 ○3 ○3.5 ○4 ○4.5 ○5 **Réservé**