Chapitre 2

Fonctions quadratiques

Table 2.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 2…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Représentation graphiques de fonctions quadratiquess			
Forme réduite, ordonnée à l'origine et discriminant	2.1		
Forme canonique, sommet et axe de symétrie	2.2,	2.3	
Forme factorisée et intersection avec l'axe des abscisses		2.4	
Sens de variation d'une fonction quadratique			
Justifier le sens de variation à partir de différentes formes		2.5	
Choisir la forme la plus adaptée			
Utiliser les 3 formes pour justifier		2.6, 2.7	
Problèmes inverses			
Déterminer en premier l'expression canonique, factorisée ou réduite à partir de la représentation graphique		2.8 à 2.13	
Systèmes et intersection de courbes			
Résoudre un système non-linéaire par substitution		2.14	
Justifier les coordonnées des intersection d'une parabole et d'une droite, ou de deux paraboles.		2.15, 2.16	
Approfondissement: équations à paramètre			
Identifier le nombre de solutiosn selon les valeurs du paramètre.		2.17, 2.18, 2.19	2.20
Applications aux intersections de paraboles et de droites.		2.21, 2.22,	
Problèmes			
Problèmes simples		2.23, 2.24	2.25

2.1 Étudier une fonction

Une fonction est typiquement définie sur un domaine par une *expression* , et/ou sa *représentation* à l'aide d'une courbe $\mathscr{C}$ des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant $y = f(x)$.

■ **Exemple 2.1 — approches graphiques ou algébriques.**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$.

Sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$.

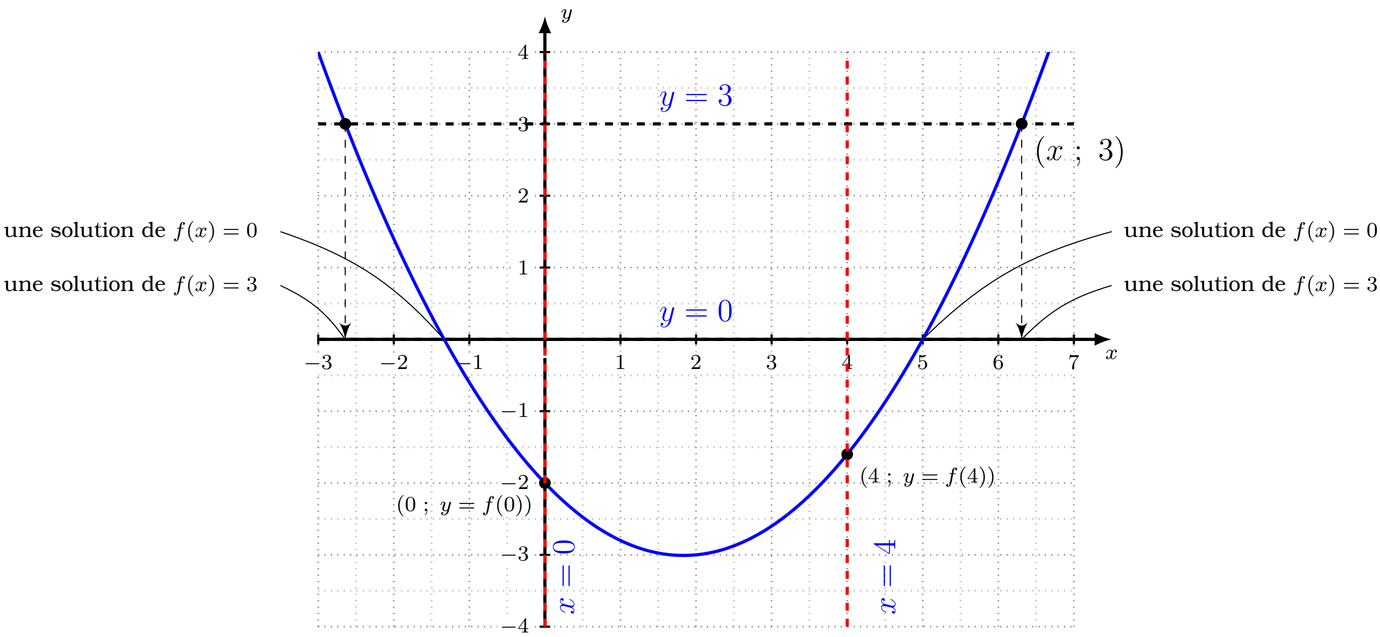


Figure 2.1 – Vocabulaire des intersections de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repères :
— L'ordonnée à l'origine $y = f(0)$ est l'*ordonnée* du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 .
— Les *zéros* de f, sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Graphiquement, c'est les *abscisses* des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

<table>
<tr><th></th><th>approche algébrique</th><th>approche numérique</th></tr>
<tr><td colspan="3">questions se ramenant à une recherche d'image $(x\ ;\ y = f(x) = ?)$</td></tr>
<tr><td>déterminer l'image de 4 par la fonction f</td><td rowspan="4">L'abscisse $x = 4$,
évaluer l'image
$y = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$</td><td rowspan="4">Lire l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse est $x = 4$</td></tr>
<tr><td>calculer $f(4)$</td></tr>
<tr><td>déterminer l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 4</td></tr>
<tr><td>le point $A(4\ ;\ -1)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?</td></tr>
<tr><td colspan="3">questions se ramenant à une recherche d'antécédent $(x = ?\ ;\ y = f(x))$</td></tr>
<tr><td>déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f</td><td rowspan="3">L'ordonnée $y = 3$,
résoudre l'équation
$3 = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$</td><td rowspan="3">Lire l'abscisse de(s) point(s) de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est $y = 3$.</td></tr>
<tr><td>résoudre l'équation $f(x) = 3$</td></tr>
<tr><td>déterminer l'abscisse de(s) point(s) de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée 3</td></tr>
</table>

Une bonne partie de cette année est dédiée à l'étude de fonctions ou de familles de fonctions.

On vise à pouvoir :

1. Déterminer (graphiquement ou algébriquement) l'image/l'ordonnée $y = f(x)$ pour une abscisse donnée.
2. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ et en connaitre ses propriétés (droite non verticale pour les fonctions affines, paraboles verticales pour les fonctions quadratiques ...)
3. Identifier ou justifier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Pour tout $k \in \mathbb{R}$:
   a) Identifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, inconnue x.
   b) Résoudre une équation de la forme $f(x) = k$ inconnue x (antécédents de k).
   c) Résoudre une inéquation de la forme $f(x) \geqslant k$ inconnue x.

   Ceci peut être fait graphiquement ou algébriquement selon la situation.
4. (bis) Le cas $k = 0$ nous intéresse particulièrement :
   a) Déterminer le nombre de zéros de la fonction (solution de $f(x) = 0$).
   b) Déterminer le(s) zéro(s) de la fonction solutions de $f(x) = 0$.
   c) Dresser le tableau de signe de f.
5. Problèmes inverses : retrouver l'expression algébrique à partir d'informations (sur la représentation graphique notamment).

2.2 Fonctions quadratiques

Définition 2.1

Une *fonction polynôme de degré 2* ou simplement *fonction quadratique* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \neq 0$, b et $c \in \mathbb{R}$:

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad$ forme réduite

Pour $\Delta = b^2 - 4ac$, $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \dfrac{-\Delta}{4a}$, f peut s'écrire :

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $\quad$ forme canonique

Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, alors il existe r_1 et r_2 tel que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ $\quad$ forme factorisée

Sa représentation graphique s'appelle une *parabole* (Desmos V1 et V2).

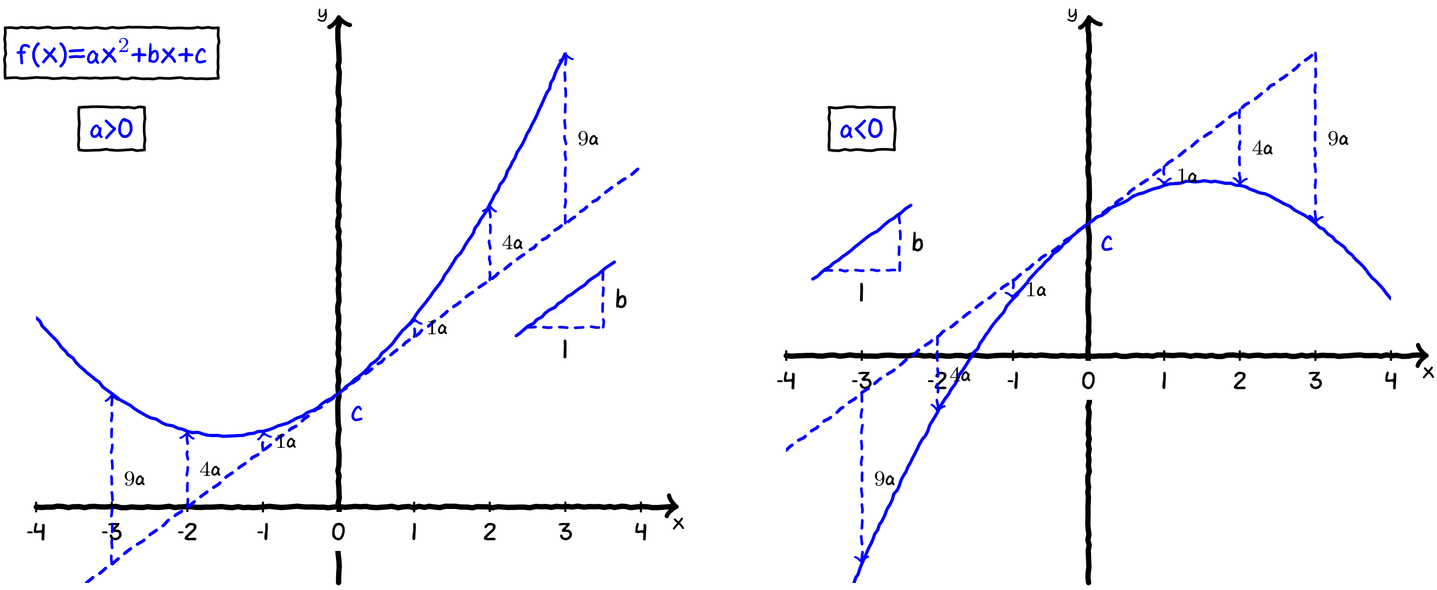


Figure 2.2 – Représentation graphique d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, cas $a > 0$ et $a < 0$.

Proposition 2.1 — **forme canonique et sens de variation. admis.**

La fonction quadratique de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ (avec $a \neq 0$) est monotone sur chacun des intervalles $]-\infty; \alpha]$ et $[\alpha; \infty[$.

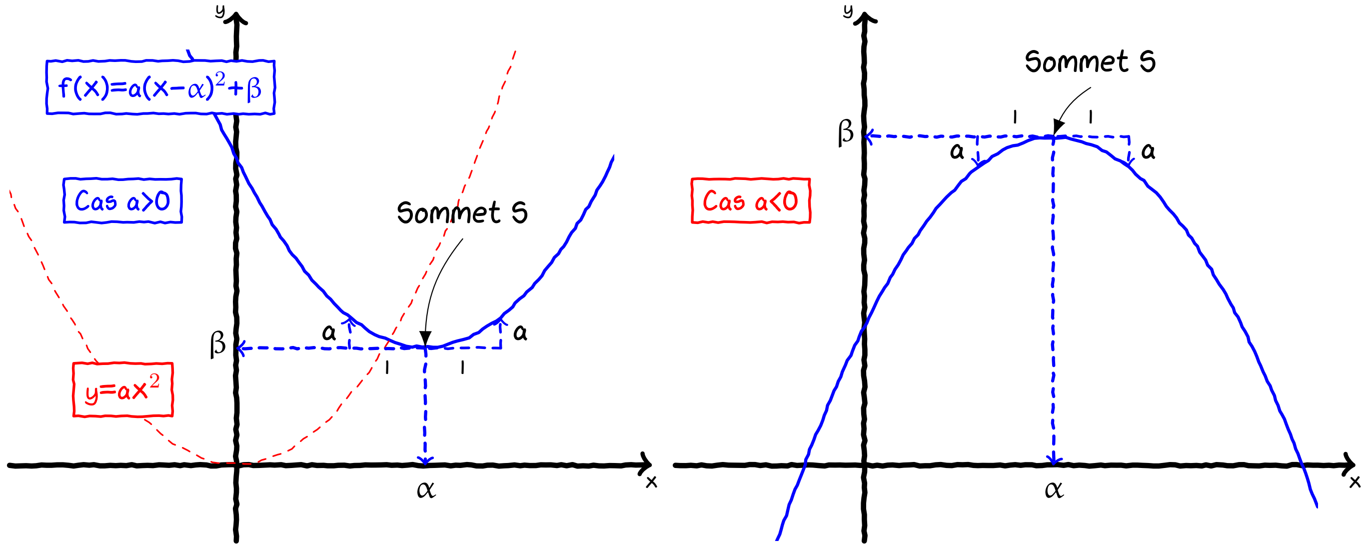
(a) $a > 0$, f admet un **minimum** β atteint en α.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c $a > 0$	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

(b) $a < 0$, f admet un **maximum** β atteint en α.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Figure 2.3 – Représentation graphique de f donnée par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. Desmos1, v2

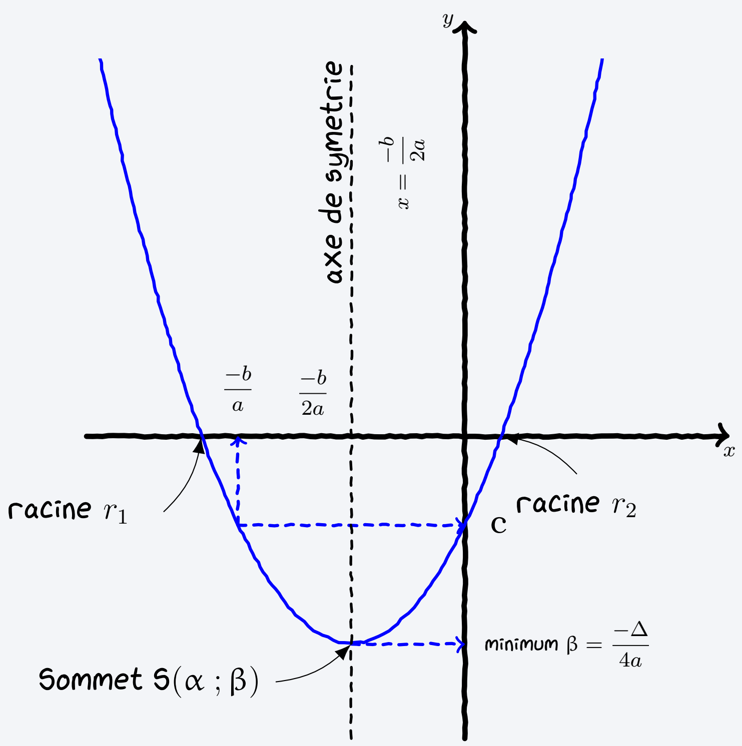


Propriétés 2.2 — représentation graphique.

La représentation graphique d'une fonction quadratique définie par $f(x) = ax^2+bx+c$ est une *parabole* d'équation $y = ax^2+bx+c$ ou sous forme canonique $y = a(x-\alpha)^2+\beta$.

1. de sommet $S(\alpha\ ;\ \beta)$
2. d'axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

   Si f admet des racines r_1 et r_2 alors $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{r_1+r_2}{2}$
3. d'ordonnée à l'origine $f(0) = c$.



2.3 Exercices : Fonctions quadratiques

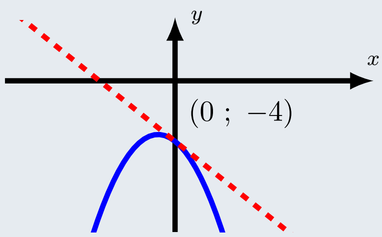
2.3.1 Exercices : Représentation graphiques de fonctions quadratiques

■ **Exemple 2.2 — représenter à main levée connaissant la forme réduite.**

Pour chacune des fonctions quadratiques et sa représentation graphique :

1. Donner a et préciser le sens de la parabole.
2. Préciser les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
3. Déterminer le discriminant Δ et déduire le nombre de points d'intersections avec l'axe des abscisses.
4. Représenter la parabole à main levée.

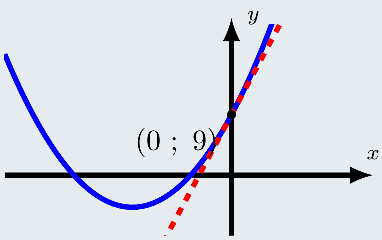
solution pour. $\mathscr{C}_f$ et f définie par $f(x) = -5x^2 - 5x - 4$



1. $a = -5 < 0$, parabole orientée vers le bas $(\frown)$
2. $c = -4$. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0\ ;\ -4)$
3. $\Delta = (-5)^2 - 4(-3)(-4) = -23 < 0$. f n'a pas de racines. $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
4. $f(x) \leqslant -3x - 4$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous et tangente au point $A(0\ ;\ -4)$ à $d\colon y = -3x - 4$.

■

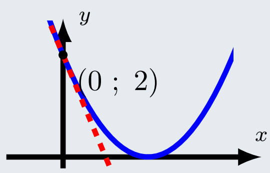
solution pour. $\mathscr{C}_g$ et g définie par $g(x) = x^2 + 3x + 2$



1. $a = 1 > 0$, parabole orientée vers le haut $(\smile)$
2. $c = 2$. $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0\ ;\ 2)$
3. $\Delta = (3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$. g a deux racines distinctes. $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en deux points différents.
4. $g(x) \geqslant 3x + 2$, $\mathscr{C}_g$ est au dessus et tangente à $d\colon y = 3x + 2$ au point $A(0\ ;\ 2)$.

■

solution pour. $\mathscr{C}_h$ et h définie par $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$.



1. $h = 4 > 0$, parabole orientée vers le haut $(\smile)$
2. $c = 9$. $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des ordonnées en $A(0\ ;\ 9)$
3. $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9) = 0$. $\mathscr{C}_h$ coupe l'axe des abscisses en 1 point.
4. $h(x) \geqslant -12x + 9$, $\mathscr{C}_h$ est au dessus et tangente à $d\colon y = -12 + 9$ au point $A(0\ ;\ 9)$.

■

Exercice 2.1 — **variations.** Voir le corrigé

Pour chaque fonction quadratique f et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$:

— Déterminer le discriminant Δ et le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des des abscisses.

— Représenter $\mathscr{C}_f$ à main levée en indiquant l'ordonnée à l'origine.

1. $f(x) = 9x^2 + 12x + 4$
2. $f(x) = 9x^2 + 12x - 4$
3. $f(x) = 9x^2 - 12x + 5$
4. $f(x) = -8x^2 - 12x + 5$
5. $f(x) = -8x^2 + 12x - 5$
6. $f(x) = -8x^2 - 12x - 4{,}5$

Exercice 2.2 — **concepts : forme canonique et représentation graphique.** Voir le corrigé

1. La représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-s)^2 + r$ est une parabole de sommet ....

   L'axe de symétrie est la droite .... d'équation ....
2. La représentation graphique de f définie par $f(x) = 3(x-2)^2-6$ est de sommet $S(\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots)$, et $f(2) = \ldots\ldots$ est le (minimum/maximum) de f.

   L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{C}_f$ est $f(\ldots) = $..
3. La représentation graphique de f définie par $f(x) = -3(x+5)^2 + 1$ est de sommet $S(\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots)$, et $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$ est le (minimum/maximum) de f.

   L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{C}_f$ est ....

■ **Exemple 2.3** — **représenter connaissant la forme canonique.**

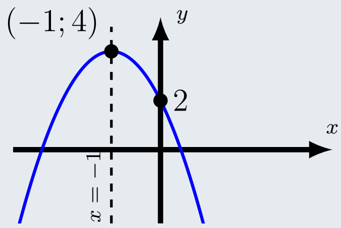
Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet
2. L'équation de l'axe de symétrie
3. Les coordonnées de l'intersection avec l'axe des ordonnées.
4. Représenter la parabole à main levée.

Solution.

1. Forme canonique : $f(x) = -2(x-(-1))^2 + 4$ avec $\alpha = -1$ et $\beta = 4$.

   Le sommet de la parabole est $S(-1\ ;\ 4)$.
2. L'axe de symétrie est $d\colon x = -1$.
3. Si $x = 0$, alors $y = f(0) = -2(1)^2 + 4 = 2$. Passe par $(0\ ;2)$.
4. $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas $\frown$



■

Exercice 2.3

Voir le corrigé

Pour chaque fonction quadratique :

— Déterminer les coordonnées du sommet

— L'équation de l'axe de symétrie

— Les coordonnées de l'intersection avec l'axe des ordonnées.

— Représenter la parabole à main levée.

1. $f(x) = (x-1)^2 + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
3. $f(x) = 2(x+2)^2 + 1$
4. $f(x) = 3x^2 + 5$
5. $f(x) = -\frac{1}{10}(x+2)^2$
6. $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$

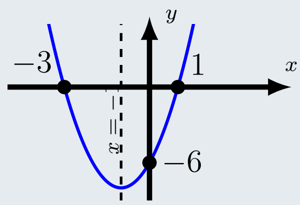
■ **Exemple 2.4 — représenter connaissant la forme factorisée.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = 2(x+3)(x-1)$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
3. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet.
4. Représenter la parabole à main levée.

Solution.

1. $f(x) = 0$ lorsque $x = -3$ ou $x = 1$. $A(-3;0)$ et $B(1;0) \in \mathscr{C}_f$.
2. Si $x = 0$ alors $y = f(0) = 2(3)(-1) = -6$. $C(0\,;-6) \in \mathscr{C}_f$.
3. $\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$, L'axe de symétrie est $d\colon x = -1$.
   $\beta = f(\alpha) = f(-1) = 2(-1+3)(-1-1) = -8$. Sommet $S(-1\,;-8)$
4. $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut $\smile$.



■

Exercice 2.4

Voir le corrigé

Pour chaque fonction quadratique donnée par son expression factorisée :

— Déterminer les coordonnées d'intersection avec l'axe des abscisses.

— Déterminer les coordonnées d'intersection avec l'axe des ordonnées.

— Donner l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

— Déterminer les coordonnées du sommet.

— Tracer la parabole $\mathscr{C}_f$ à main levée.

1. $f(x) = -2(x-1)(x-2)$
2. $f(x) = -3x(x+4)$
3. $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$
4. $f(x) = 2(x+3)(x+5)$
5. $f(x) = -2(x+3)^2$
6. $f(x) = x(x+8)$

2.3.2 Exercices : Sens de variation d'une fonction quadratique

■ Exemple 2.5 — variation à partir de la forme réduite.

Étudier le sens de variation des fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^2 - 8x + 2$.

1. Déterminer la forme canonique directement ou *par complétion au carré*
2. Dresser son tableau de variation en justifiant par le signe de a.
3. Conclure en précisant la valeur du maximum ou minimum.

Solution. $a = -3 < 0$ ($\frown$)

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(-3)(2) = 92$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-8)}{2(-3)} = \dfrac{-4}{3}$

$\beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-92}{4(-3)} = \dfrac{92}{12} = \dfrac{23}{3}$

$$\begin{aligned} g(x) &= -3x^2 - 8x + 2 \\ &= a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= -3\big(x - (-3)\big)^2 + \frac{23}{3} \\ &= -3\big(x + 3\big)^2 + \frac{23}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{23}{3}$	$\searrow$

$\therefore$ $\frac{23}{3}$ est le maximum de g atteint pour $x = -3$ ■

■ Exemple 2.6 — et si on nous donne la forme factorisée ?.

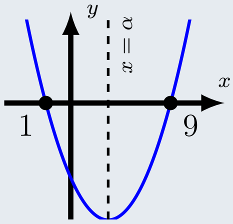
Étuder le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x-9)(x+1)$

1. Déterminer la forme canonique directement ou *par complétion au carré*
2. Dresser son tableau de variation en justifiant par le signe de a.
3. Conclure en précisant la valeur du maximum ou minimum.

Solution. $a = 3 > 0$ ($\smile$)
deux racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 9$.

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = \dfrac{(-1)+9}{2} = 4$

$\beta = \boxed{f(\alpha) = 3(4-9)(4+1)} = -75$



$$\begin{aligned} g(x) &= 3(x-9)(x+1) \\ &= a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= 3\big(x-4\big)^2 + (-75) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-75	$\nearrow$

$\therefore$ -75 est le minimum de f atteint pour $x = 4$ ■

Exercice 2.5 Voir le corrigé

Pour chaque fonction déterminer la forme canonique puis dresser son tableau de variation.

1. a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$
   b) $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$
   c) $f(x) = -x^2 - 3x + 3$
   d) $f(x) = 1 - x - x^2$
2. a) $f(x) = -2(x-6)(x-10)$
   b) $f(x) = 4(x+3)(x+6)$
   c) $f(x) = 4x(5x+30)$
   d) $f(x) = (12-3x)(2x-8)$

2.3.3 Exercices : Choisir la forme la plus adaptée

Pour une fonction quadratique f :

— La *forme réduite* est adaptée pour calculer rapidement des images $f(k)$ en particulier $f(0)$.
Permet de résoudre toute équation $f(x) = k$ ou inéquation $f(x) = k$ à l'aide du discriminant.

— La *forme canonique* est adaptée pour identifier rapidement (1) les variations d'une fonction (2) le nombre de solutions de $f(x) = k$ (3) les coordonnées du sommet de la parabole et son axe de symétrie.
La résolution d'équations $f(x) = k$ se fait par racine carrée.

— La *forme factorisée* est adaptée pour identifier rapidement les racines d'une fonction ainsi que pour la résolution d'équations du type $f(x) = 0$.

Exercice 2.6 — Grand classique. Voir le corrigé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 2(x+4)(x-2)$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$
3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a) Construire le tableau de variation de f.
b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
c) Calculez $f(0)$.
d) Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
e) Quel le nombre de solutions de $f(x) = 20$?
f) Résoudre l'équation $f(x) = -16$.
g) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 2.7 Voir le corrigé

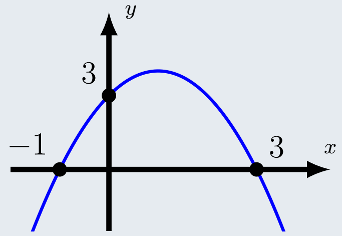
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 14x + 15$ et sa représentation $\mathscr{P}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x+3)(3x+5)$.
2. Justifier à l'aide des formules du cours que $f(x) = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$
3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a) Quel est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
c) Déterminer les coordonnées de l'intersection avec l'axe des ordonnées.
d) Quel est le minimum de la fonction f ?
e) Déterminer le nombre d'antécédents de -1 ?
f) Construire le tableau de signe de f
g) Résoudre l'équation $f(x) = 15$.
h) Résoudre l'inéquation $f(x) > -\frac{4}{3}$.

2.3.4 Exercices : Problèmes inverses

■ **Exemple 2.7 — trouver la forme factorisée à partir de la représentation $\mathscr{P}$.**

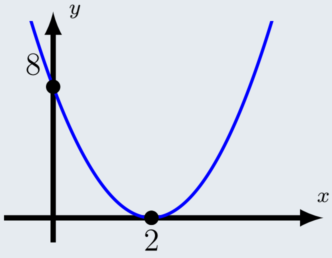


1. Par lecture graphique les racines de f sont -1 et 3.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-(-1))(x-3) = a(x+1)(x-3)$, avec $a<0$.

   $A(0\,;3) \in \mathscr{P} \iff f(0)=3 \iff a(0+1)(0-3)=3 \iff -3a=3$.

   $\therefore a=-1$ et f est définie par $f(x) = -(x+1)(x-3)$

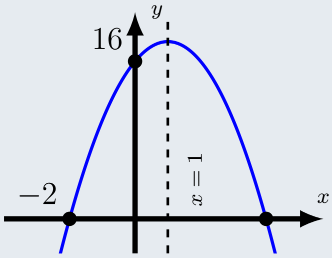


2. Par lecture graphique f a une racine double $r=2$.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-2)^2$, avec $a>0$.

   $A(0\,;8) \in \mathscr{P} \iff f(0)=8 \iff a(0+2)^2=8 \iff 4a=8$.

   $\therefore a=2$ et f est définie par $f(x) = 2(x-2)^2$



3. Par lecture graphique une des racines est -2.

   L'axe de symétrie est d: $x=1$, l'autre racine est donc 4.

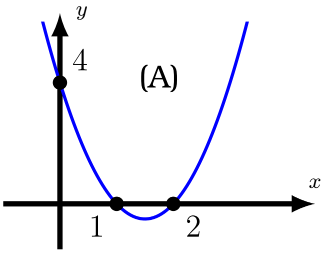
   Pour tout x : $f(x) = a(x-(-2))(x-4) = a(x+2)(x-4)$, avec $a<0$.

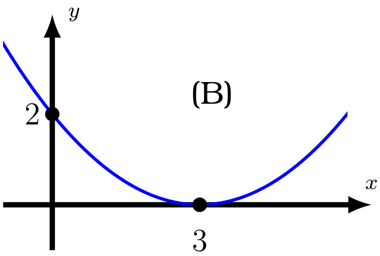
   $A(0;16) \in \mathscr{P} \iff f(0)=16 \iff a(0+2)(0-4)=16 \iff -8a=16$

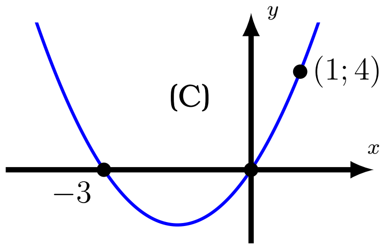
   $\therefore a=-2$ et f est définie par $f(x) = -2(x+2)(x-4)$

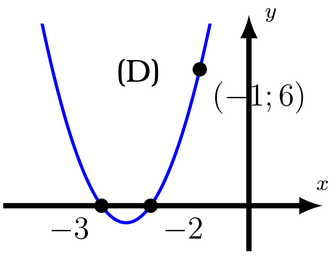
Exercice 2.8 Voir le corrigé

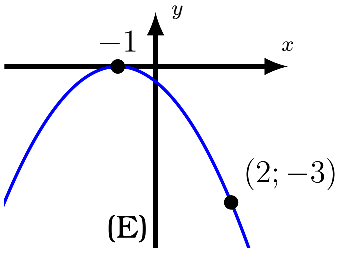
Déterminer et justifier la forme factorisée des fonctions quadratiques représentées.

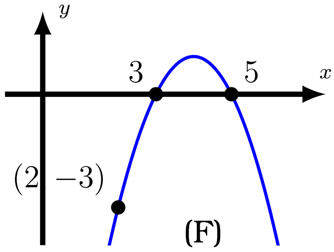


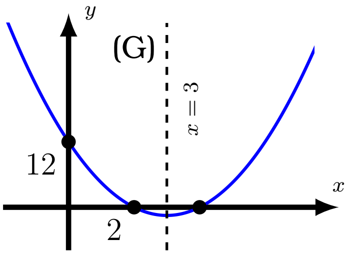


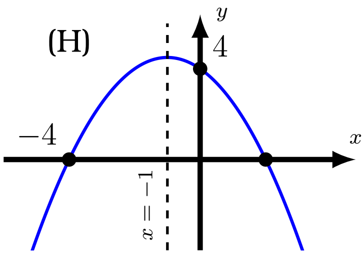




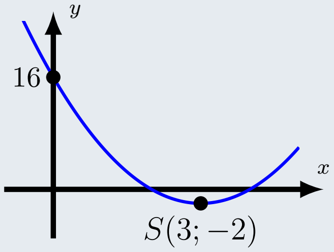


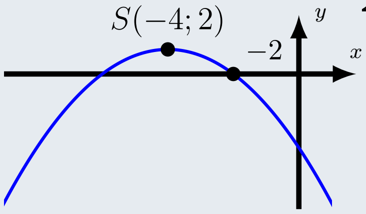






■ **Exemple 2.8 — trouver la forme canonique à partir de la représentation $\mathscr{P}$.**





1. Sommet $S(3;-2)$, donc $\alpha = 3$ et $\beta = -2$.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-3)^2 + (-2)$, avec $a > 0$.

   $A(0\,;16) \in \mathscr{P} \iff f(0) = 16 \iff a(0-3)^2 - 2 = 16 \iff 9a - 2 = 16.$

   $\therefore a = 2$ et f est définie par $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$

2. Sommet $S(-4;2)$, donc $\alpha = -4$ et $\beta = 2$.

   Pour tout x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-(-4))^2 + 2$, avec $a < 0$.

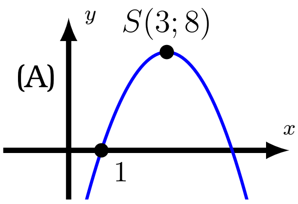
   $A(-2;0) \in \mathscr{P} \iff f(-2) = 0 \iff a(-2+4)^2 + 2 = 0 \iff 4a + 2 = 0$

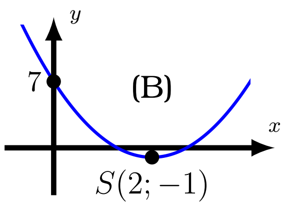
   $\therefore a = -\frac{1}{2}$ et f est définie par $f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 2$

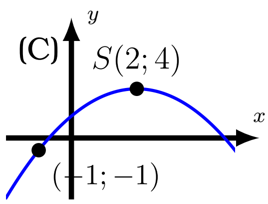
Exercice 2.9

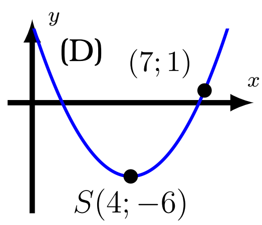
Voir le corrigé

Déterminer en justifiant les formes canoniques des fonctions quadratiques représentées ci-dessous. Pour chaque parabole, S est son sommet.



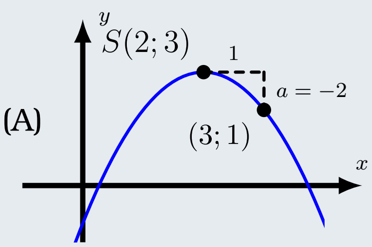


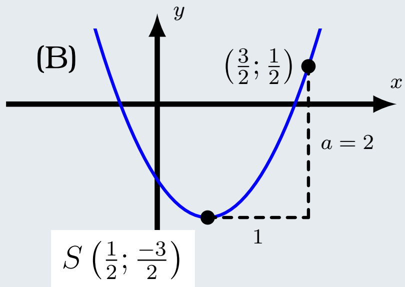




■ **Exemple 2.9 — déterminer a par lecture graphique.**

Dans certains cas, le coefficient a de la forme factorisée/réduite/canonique peut être déterminé par lecture graphique directe :





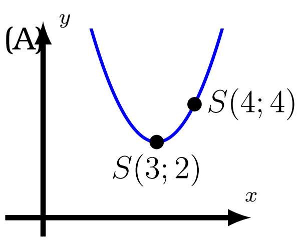
(A) Pour tout x : $f(x) = -2(x-3)^2 + 3$.

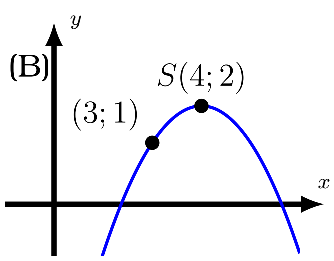
(B) Pour tout x : $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$.

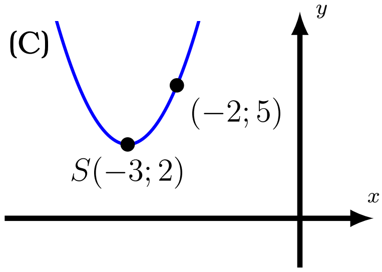
Exercice 2.10

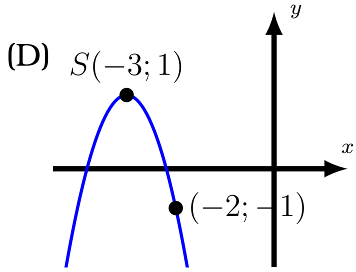
Voir le corrigé

Donner par lecture graphique la forme canonique des fonctions quadratiques représentées.









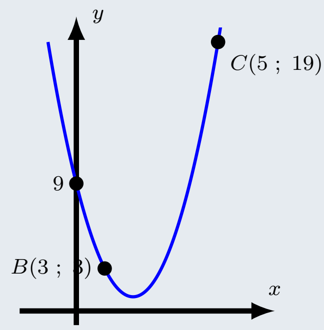
■ **Exemple 2.10** — **déterminer directement l'expression réduite dans certains cas simples.**

Soit la parabole $\mathcal{P}$ passant par les points $A(0\ ;\ 9)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(5\ ;\ 19)$.

Déterminer l'équation de la parabole.

solution. la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $\mathcal{P}\colon y = ax^2 + bx + c$ avec $a, b,$ et $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 9 = a(0)^2 + b(0) + c & \text{car } A(0\ ;\ 9) \in \mathcal{P} \\ 3 = a(1)^2 + b(1) + c & \text{car } B(1\ ;\ 3) \in \mathcal{P} \\ 19 = a(5)^2 + b(5) + c & \text{car } C(5\ ;\ 19) \in \mathcal{P} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 9 = c \\ 3 = a + b + c \\ 19 = 25a + 5b + c \end{cases} \iff \begin{cases} 9 = c \\ -6 = a + b \\ 10 = 25a + 5b \end{cases}$$

résoudre ...

$\therefore \quad a = 2\ ; b = -8; \quad c = 9$ avec $\mathcal{P}\colon y = 2x^2 - 8x + 9$

La résolution d'un système linéaire, peut se faire par substitution, ou par élimination. ■

Exercice 2.11 Voir le corrigé

Soit la parabole $\mathcal{P}$ passant par les points $A(0\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 3)$ et $C(-1\ ;\ 6)$.

Déterminer l'équation de la parabole.

Exercice 2.12 — **une subtilité de rédaction.** Voir le corrigé

Soit la fonction quadratique f définier sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = 3$, $f(1) = 7$ et $f(-3) = 5$.

Déterminer l'expression de f.

Exercice 2.13 — **et si on ne connait pas l'ordonnée à l'origine ?.** Voir le corrigé

Soit la fonction quadratique f définie sur $\mathbb{R}$ tel que $f(-5) = 1$, $f(-2) = 4$ et $f(4) = -8$.

On pose $a \neq 0, b,$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Déterminer un système de 3 équations vérifiées par a, b et c.
2. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le triplet solution du système précédent.

2.3.5 Exercices : Systèmes

Exercice 2.14 — **systèmes non-linéaires.** Voir le corrigé

Résoudre les systèmes suivants par substition.

1. $\begin{cases} y = x + 1 \\ xy = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$

2.3.6 Exercices : Intersection de courbes

■ **Exemple 2.11 — problèmes d'intersection et systèmes.**

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}\colon y = 2x^2 + 12x - 29$ et la droite $d\colon y = -8x + 19$

solution. Le point $M(x;y)$ est intersection de $\mathscr{P}$ et d alors :

$$\begin{cases} y = -8x + 19 & \text{car } M(x;y) \in d \\ y = 2x^2 + 12x - 29 & \text{car } M(x;y) \in \mathscr{P} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -8x + 19 \\ -8x + 19 = 2x^2 + 12x - 29 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -8x + 19 \\ 0 = 2x^2 + 20x - 48 \end{cases}$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4(2)(-48) = 784 > 0$$

deux valeurs possible pour x

$$\iff \begin{cases} y = -8x + 19 \\ x = 2 \text{ ou } x = -12 \end{cases}$$

$$\iff (x = 2; y = 3) \text{ ou } (x = -12; y = 115)$$

$$\therefore M_1(2\ ;\ 3) \text{ ou } M_2(-12\ ;\ 115)$$ ■

Exercice 2.15 Voir le corrigé

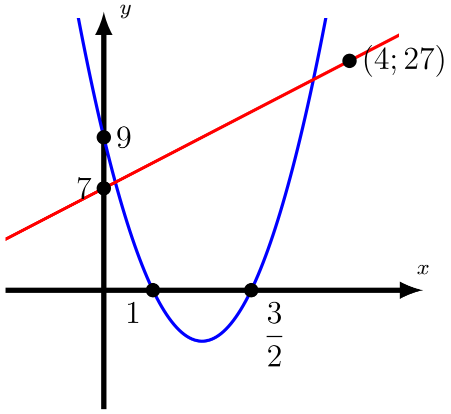
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de :

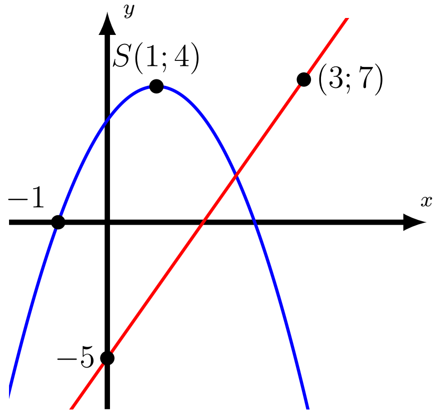
1. la parabole $\mathscr{P}\colon y = x^2 - 2x + 8$ et la droite $d\colon y = x + 6$
2. la parabole $\mathscr{P}\colon y = 3x^2 - 5x + 2$ et la droite $d\colon y = x - 1$
3. les paraboles $\mathscr{P}\colon y = x^2 - 3x + 4$ et $\mathscr{Q}\colon y = -x^2 + 4x - 1$

Exercice 2.16 Voir le corrigé

Nous avons représenté une droite d et une parabole $\mathscr{P}$. Déterminer pour chaque représentation les coordonnées des points d'intersection de d et de $\mathscr{P}$ en suivant la démarche indiquée :

1. Déterminer l'équation de la droite d.
2. Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ (savoir faire 6)
3. Écrire le système vérifié par les coordonnées des points d'intersection et le résoudre.





2.3.7 Exercices : Équations à paramètre et applications

■ **Exemple 2.12** Soit $k \in \mathbb{R}$ et l'équation $(E_k)\colon kx^2 + (k+3)x - 1 = 0$ d'inconnue x.

1. Écrire l'équation (E_k) pour $k = 0$ et la résoudre.
2. Pour $k \neq 0$, exprimer le discriminantde (E_k) en fonction de k.
3. Déterminer les valeurs de k pour les quelles l'équation admet (1) une racine double (2) deux racines distinces (3) aucune racine réelle.

Solution.

1. Pour $k = 0$, $(E_k)\colon 3x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{3}$.
2. $\Delta = (k+3)^2 - 4(k)(-1) = k^2 + 6k + 9 + 4k = k^2 + 10k + 9 = (k+1)(k+9)$
3. Pour $k = 0$, la solution est unique (et l'équation n'est pas quadratique).

   Pour $k \neq 0$, l'équation est quadratique :
   — L'équation n'a pas de racines réelles si $\Delta < 0$, donc $-9 < k < -1$.
   — L'équation admet une racine double si $\Delta = 0$, donc $k = -1$ ou $k = -9$ (et si $k = 0$).
   — L'équation admet deux racines distinctes si $\Delta > 0$, donc $k < -9$ ou $k > -1$ (et $k \neq 0$)

■

Exercice 2.17 Voir le corrigé

Soit $k \in \mathbb{R}$ et l'équation $(E_k)\colon (k+1)x^2 + kx + k = 0$ d'inconnue x.

1. Dans cette question $k = -1$. Écrire l'équation (E_k) et la résoudre.
2. On suppose que $k \neq -1$. Montrer (E_k) est quadratique de discriminant $\Delta = -3k^2 - 4k$.
3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation (E_k) admet une ou plusieurs solutions.

Exercice 2.18 Voir le corrigé

Soit $k \in \mathbb{R}$ et l'équation $(E_k)\colon kx^2 + 3x + 2 = 0$ d'inconnue x.

1. Dans cette question $k = 0$. Écrire l'équation (E_k) et la résoudre.
2. On suppose que $k \neq 0$. Déterminer l'expression du discriminant de (E_k).
3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation (E_k) admet une solution unique.

Exercice 2.19 Voir le corrigé

Soit $k \in \mathbb{R}$ et l'équation $(E_m)\colon x^2 - 2mx + 4(m-1) = 0$ d'inconnue x.

1. Montrer que le discriminant $\Delta = 4(m-2)^2$.
2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation (E_m) admet de(s) racine(s) réelles.
3. Exprimer en fonction de m les solutions de l'équation.

Exercice 2.20 Voir le corrigé

Pour chaque cas, exprimer le discriminant Δ en fonction de k et en déduire les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles qui rendent la proposition est vraie :

1. « l'équation $x^2 + 4x + k^2 = 0$ d'inconnue x admet 2 solutions réelles distinctes ».
2. « l'équation $2x^2 + kx - k = 0$ d'inconnue x admet aucune solution réelle ».
3. « l'équation $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 5 = 0$ d'inconnue x admet une solution réelle unique ».
4. « l'expression $2x^2 - 3x + k + 1$ d'inconnue x admet une ou plusieurs racines réelles ».
5. « pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'expression $P(x) = 2x^2 + (k-2)x + 2 \geqslant 0$ ».

Exercice 2.21 Voir le corrigé

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la parabole $\mathscr{P} : y = 2x^2 - 3x - 7$ et la droite $d : y = x + m$ n'ont pas de points d'intersection.

Exercice 2.22 Voir le corrigé

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la parabole $\mathscr{P} : y = x^2 - 4x + 2$ et la droite $d : y = mx - 2$ ont un unique point commun.

2.4 Petits problèmes classiques

Exercice 2.23 — un classique : problème de l'enclos. Voir le corrigé

Ayant trouvé 40 m de grillage dans son garage, Mme Claudia Chiffre a décidé de les utiliser pour construire un enclos rectangulaire pour ses poules. Afin d'obtenir un enclos plus grand, il utilise le mur du jardin qui formerait un côté, le grillage formant les trois autres côtés.

On note x la profondeur de l'enclos.

1. Montrer que l'aire de enclos est donnée par $A(x) = x(40 - 2x)\text{m}^2$
2. Déterminer les dimensions réalisables de l'enclos pour lesquelles l'aire de l'enclos est maximale.

Exercice 2.24 Voir le corrigé

On cherche deux réels x et y dont la somme vaut 6 et le produit vaut 4.

1. Écrire un système d'équations vérifié par x et y.
2. En déduire une équation quadratique vérifiée par x et déterminer x et y.

Exercice 2.25 Voir le corrigé

Pour quelles valeurs de $k \geqslant 0$ existe-t-il un rectangle tel que son aire et son périmètre soient égaux à k ?