Chapitre 4

Probabilités conditionnelles et indépendance

Table 4.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 4...

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
Loi de probabilités - reactivation 2nde			
Modéliser une expérience aléatoire (diagramme de Venn, diagramme d'univers, tableau d'effectifs croisés)	4.1 à 4.7		
Propriétés d'une loi de probabilité	4.8, 4.9		
Loi de probabilités conditionnelles			
Définition, exploiter un tableau croisé des effectifs		4.10 à 4.14	
Formule des probabilités composées	4.15,	4.16	4.17, 4.18, 4.19
Modéliser à l'aide d'arbre de probabilités	4.27, 4.28, 4.29	4.30, 4.31, 4.32	4.33, 4.34, 4.35
Événement indépendants			
Définitions et propriétés		4.20 à 4.22	
Applications		4.23 à 4.25	4.26

4.1 Lois de probabilités (vu en 2nde)

Une *expérience aléatoire* est une expérience *renouvelable à l'identique*, dont on connait les *issues*, et dont le résultat est *imprévisible*. Une *épreuve* est un renouvellement de l'expérience.

— une *issue* est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \ldots$. à lire « oméga »

— l'ensemble des issues possibles (l'univers) se note $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_n\}$.

— le nombre total d'issues est n est supposé fini.

— une partie $E \subset \Omega$ est dite *événement*

— pour une issue $\omega \in E$ on dit « ω *réalise* l'événement E ».

Définition 4.1

Pour un un événement E ayant un nombre *fini* d'issues, on appelle *cardinal* de E, noté $\text{Card}(E)$, $\sharp E$ ou $|E|$ le nombre d'issues qui réalisent E.

■ **Exemple 4.1** Pour l'événement $E = \{2; 4; 6\}$, $\text{Card}(E) = |E| = 3$.

Postulat 4.1 — existence d'une loi de probabilité. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini d'issues possibles, chacune de ces issues possède une probabilité d'*apparaître*.

Définition 4.2 — définition constructive d'une loi de probabilité.

Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) on attribue à chaque événement élémentaire ω une probabilité positive

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n \qquad P(\{\omega_i\}) = p(\omega_i) = p_i \geqslant 0$$

b) la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$$

c) Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le réalisent :

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

Postulat 4.2 — La loi naïve des grands nombres.

Quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la fréquence (relative) d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité.

$$\text{frequence(événement)} \approx P(\text{événement}) \times \text{nbr de répétition}$$

Définition 4.3 — situation d'équiprobabilité.

Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ avec issues *équiprobables* :

a) $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{\text{Card}\,\Omega}$

b) Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|} = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Convention lycée Tout exercice où figure des expressions tel que : « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urnes opaque et jetons indiscernables au toucher » ... suppose implicitement l'équiprobabilité des issues. Il faut néanmoins identifier l'ensemble des issues considéré !

■ **Exemple 4.2 — paradoxe des 3 bancs.**

L'imprécision est source de paradoxes du calcul de probabilités quand plusieurs modèles peuvent être invoqués pour décrire une même situation. Prenons l'énoncé suivant :

> Dans la cours du lycée, il y a trois bancs à deux places. Ana est déjà assise pour prendre son déjeuner. Bertrand va s'asseoir « au hasard ».
>
> Quelle est la probabilité p qu'ils se retrouvent sur le même banc ?

— Si les choix d'un banc parmi 3 sont équiprobables alors $p = \dfrac{1}{3}$.

— Si les choix d'une place parmi les 5 disponibles sont équiprobables alors $p = \dfrac{1}{5}$.

Théorème 4.3 — propriétés des lois de probabilités.

Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés suivantes :

(P1) loi unitaire $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$

(P2) loi positive Pour tout événement A : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(P3) Pour tout événement A : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(P4) loi additive Si A et B sont des événements incompatibles alors :

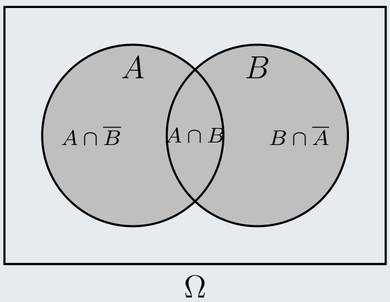
Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(P5) formule du crible (formule d'inclusion-exclusion)

Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



4.2 Probabilités conditionnelles

Soit un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ muni d'une loi de probabilité P, et un événement A ($P(A) \neq 0$).

Pour une issue élémentaire $\omega \in \Omega$ on définit sa probablité sachant A :

$$P_A(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(A)} \times P(\omega) & \text{Si } \omega \text{ réalise } A \ (\omega \in A) \\ 0 & \text{Si } \omega \text{ ne réalise pas } A \ (\omega \notin A) \end{cases}$$

R Les probabilités condtionnelles sachant A font un « zoom sur A ». Les issues qui ne réalisent par A sont négligées, et les probabilités de celles réalisant A sont amplifiées d'un facteur $\frac{1}{P(A)} > 1$.

Définition 4.4 Soit un événement A avec $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement E, la probabilité conditionnelle sachant A de E est donnée par :

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

Explications de la formule. $\forall E \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} P_A(E) = \sum_{\omega \in E} P_A(\omega) &= \sum_{\omega \in A \cap E} P_A(\omega) + \sum_{\omega \in \overline{A} \cap E} P_A(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in A \cap E} \frac{1}{P(A)} \times P(\omega) + 0 \\ &= \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A \cap E} P(\omega) \\ &= \frac{1}{P(A)} \times P(A \cap E) \end{aligned}$$

■

R Il est incorrect de définir la probabilité conditionnelle en disant que l'on réduit l'univers aléatoire à un « sous univers » $A \subset \Omega$. Sinon on ne peut calculer $P_A(E)$ que pour $E \subset A$.

Théorème 4.4 — **loi conditionnelle sachant A.**

P_A est la *loi conditionnelle sachant* A. C'est une loi de probabilité sur Ω qui vérifie :

(i) loi unitaire $P_A(\Omega) = 1$ et positive : pour tout événement E on a $0 \leqslant P_A(E) \leqslant 1$.

(ii) pour tout événement E : $P_A(\overline{E}) = 1 - P_A(E)$. $\cancel{P_{\overline{A}}(E) = 1 - P_A(E)}$

(iii) pour tous événements E et F disjoints : $P_A(E \cup F) = P_A(E) + P_A(F)$.

(iv) *formule du crible* : $P_A(E \cup F) = P_A(E) + P_A(F) - P_A(E \cap F)$.

Démonstration.

(ii) pour tout événement E : $0 \leqslant P_A(E) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(A)} \leqslant 1$.

en particulier : $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

(ii) , (iii) et (iv) sont laissés en exercice. ■

Propriété 4.5 — Formule des probabilités composées. Pour $P(A) \neq 0$:

$$\text{pour tout événement } E : \qquad P(A \cap E) = P(A)\, P_A(E)$$

R La probabilité de « A et E » est égale au produit de la probabilité de A par la probabilité sachant A de E.

Théorème 4.6 — Formule de Bayes.

Pour deux événements A et B (de probablités non nulles $P(A)$ et $P(B) \neq 0$), on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

4.3 Événements indépendants

Définition 4.5 — indépendance. Soit A et E deux événements et $P(A) \neq 0$.

1. Si $P_A(E) > P(E)$, l'événement A est *favorable* à E.
2. Si $P_A(E) < P(E)$, l'événement A est *défavorable* à E.
3. Si $P_A(E) = P(E)$, l'événement A n'a pas d'influence statistique sur E.

   On dira que E est *indépendant* de A, et dans ce cas on a la règle de multiplication :

$$(\text{si } E \text{ est indépendant de } A) \qquad P(A \cap E) = P(A)\, P(E)$$

R La définition précédente est intuitive, mais ne fait pas jouer un rôle symétrique aux deux événements A et E.

Propriété 4.7

Soit deux événements A et B de probabilités non nulles ($P(A)$ et $P(B) \neq 0$).

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) B est indépendant de A (i.e. $P_A(B) = P(B)$)

(ii) A est indépendant de B (i.e. $P_B(A) = P(A)$)

(iii) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Si $P_A(B) = P(B)$ alors d'après Bayes $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$.

La démonstration de $(ii) \iff (iii)$ est similaire. ■

R Afin d'écarter les cas particuliers où $A = \varnothing$ (événement impossible), et $A = \Omega$ (événement certain), on gardera pour indépendance la définition suivante.

Définition 4.6 — indépendance, bis.

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

R On peut désormais dire que les événements impossible $\varnothing$ et certain Ω sont indépendants de tout événement E.

Théorème 4.8 Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) A et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

(iii) $\overline{A}$ et B sont indépendants : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$

(iv) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

Démonstration. $(i) \Rightarrow (iii)$

A et B sont indépendants, i.e. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Montrons que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A})P(B)$

Les autres implications se démontrent de manière similaire. ∎

4.4 Modéliser par un arbre de probabilités

Définition 4.7 — partition de l'univers.

Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ pour $n \geqslant 1$ forment une *partition* de Ω si :

1. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$;
2. Les événements sont disjoints deux à deux : pour tout $i, j \leqslant n$ avec $i \neq j$ $\quad A_i \cap A_j = \varnothing$

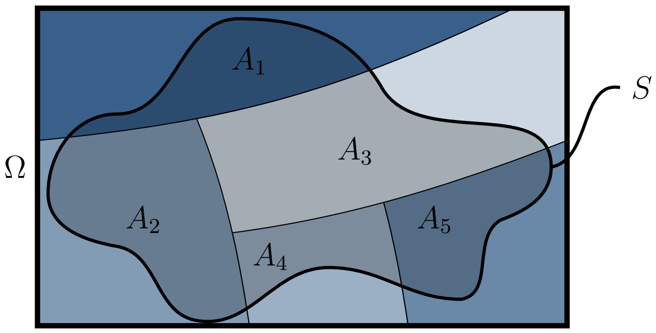


Figure 4.1 – Partition de l'univers Ω en 5 événements : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$

■ **Exemple 4.3**

1. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\ ;\ 3\ ;5\}$ et $A_3 = \{4\ ;\ 6\}$ forment une partition de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
2. A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

■ Exemple 4.4 — modélisation par un arbre : cas d'une partition à 2 événements.

Soit un univers Ω, et les événements A et S :

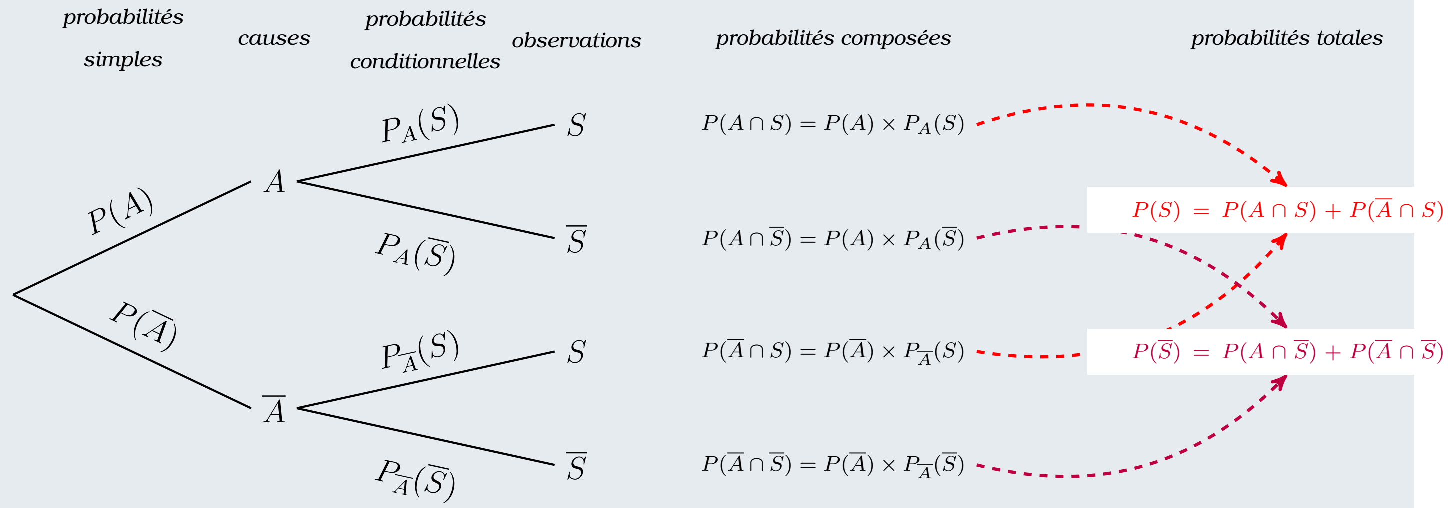
— Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω : $\Omega = A \cup \overline{A}$. Ils modélisent des causes.

— les probabilités *a priori* de A et $\overline{A}$ sont $P(A)$ et $P(\overline{A})$.

— Les événements S et $\overline{S}$ sont les *obervations*, les conséquences.

— Les probabilités $P(S)$ et $P(\overline{S})$ sont les *probabilités totales*.

On modélise cette situation par un arbre de probabilités ci dessous :



À l'aide de l'arbre on peut déterminer :

— les probabilités composées des issues $A \cap S$, $A \cap \overline{S}$, $\overline{A} \cap S$ et $\overline{A} \cap \overline{S}$.

— les probabilités totales : $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \overline{A}) = P(A)P_A(S) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(S)$

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S)$$

— les *probabilités a posteriori* de A et $\overline{A}$ sachant l'événement observé : $P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)}$ ainsi que $P_S(\overline{A})$, $P_{\overline{S}}(A)$ et $P_{\overline{S}}(\overline{A})$.

L'exemple 4.4 se généralise à toute partition A_i de Ω.

Théorème 4.9 — Formule des probabilités totales.

Pour une partition (A_i) et un événement S :

$$P(S) = \sum_i P(A_i \cap E) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(S)$$

■ Exemple 4.5

Pour la partition de la figure 4.1, la formule des probablités totales s'écrit :

$$P(S) = P(A_1)P_{A_1}(S) + P(A_2)P_{A_2}(S) + P(A_3)P_{A_3}(S) + P(A_4)P_{A_4}(S) + P(A_5)P_{A_5}(S)$$

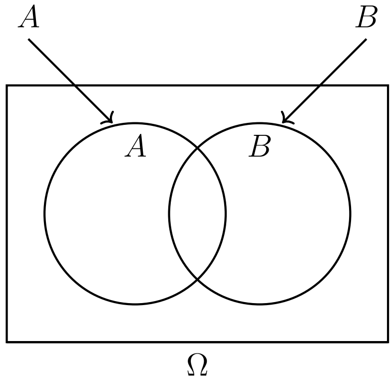
4.5 Exercices

4.5.1 Exercices : Réactivation de seconde

Exercice 4.1 — diagramme de Venn. Voir le corrigé

On lance un dé équilibré à 10 faces. On considère les événements $A =$« obtenir des carrés parfaits » et $B =$« obtenir des nombres impairs ».

1. Quelles sont les issues possibles ? Sont-elles équiprobables ?
2. Placer les issues dans le diagramme de Venn.
3. Enumérer les événements et donner leur probabilité.
   a) $A = \{$ $\}$; $P(A) =$
   b) $\overline{B} = \{$ $\}$; $P(\overline{B}) =$
   c) $A \cap B = \{$ $\}$; $P(A \cap B) =$
   d) $A \cap \overline{B} = \{$ $\}$; $P(A \cap \overline{B}) =$
   e) $\overline{A \cup B} = \{$ $\}$; $P(\overline{A \cup B}) =$



Exercice 4.2 — tableau croisé des effectifs. Voir le corrigé

Le *tableau croisé* montre la répartition des effectifs selon leur déjeuner et le moyen utilisé pour venir à l'école. On considère l'expérience aléatoire : « choisir un élève au hasard ». On considère les événements suivants :

- F: « l'élève prend un déjeuner froid »;
- C : « l'élève prend un déjeuner chaud »;
- R : « l'élève ne prend pas de déjeuner »;
- M : « l'élève vient à l'école à pied »;
- B : « l'élève vient à l'école en bus »;
- V : « l'élève est déposé en voiture ».

	Froid	Chaud	Aucun	Total
à Pied	0	6		24
en Bus		14	5	32
en Voiture	20		10	
Total	33	94		160

1. Compléter le tableau des effectifs.
2. Décrire les événements suivants par une courte phrase puis déterminer leur probabilité.
   a) $P(F) =$ .... $P(B) =$ ....
   b) $\overline{B}$= .... $P(\overline{B}) =$
   c) $\overline{R}$= .... $P(\overline{R}) =$
   d) $B \cup M =$ .... $P(B \cup M) =$
   e) $F \cap M =$ .... $P(F \cap M) =$

f) $R \cap \overline{M} =$ .... $P(R \cap \overline{M}) =$

g) $C \cap V =$ .... $P(C \cap V) =$

h) $\overline{C \cap V} =$ .... $P(\overline{C \cap V}) =$

i) $F \cup B =$ .... $P(F \cup B) =$

j) $\overline{F \cup B} =$ .... $P(\overline{F \cup B}) =$

Exercice 4.3 — lois de probabilités. Voir le corrigé

La loi de probabilité du lancer de dé cubique pipé est donnée par le tableau :

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	0.1	0,15	0,2		0,3	0,05

1. Déterminer $P(4)$.
2. Calculer la probabilités des événements :

   $A =$ « La face obtenue est paire »

   $B =$ « la face obtenue est supérieur ou égale à 4 »

   $C =$ « La face obtenue est un carré parfait »
3. On lance ce dé 50 fois. Estimer le nombre d'observation de l'événement C.

Exercice 4.4 Voir le corrigé

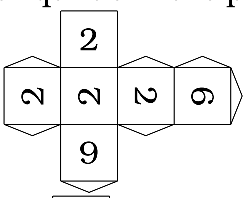
Soit la loi de probabilité représentée par le tableau ci-contre ($0 < a < 1$).

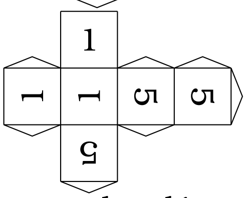
x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$3a$	$2a$	$0,01$	a	$3a$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déduire la probabilité d'obtenir un nombre premier.

Exercice 4.5 — diagramme d'univers. Voir le corrigé

On lance simultanément deux dés d'Efron et on note celui qui donne le plus grand nombre.

— dé bleu 

— dé vert 

On suppose que les dés sont équilibrés.

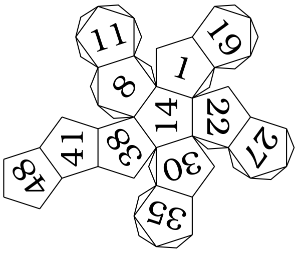
		Dé №2
Dé №1		

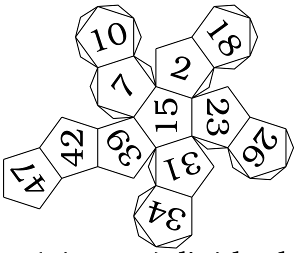
Modéliser l'expérience aléatoire à l'aide du diagramme d'univers et déterminer la probabilité que le dé Bleu l'emporte.

Exercice 4.6

Voir le corrigé

On lance simultanément les deux dés équilibrés à 12 faces ci-dessous et on note celui qui donne le plus grand nombre :

— dé noir 

— dé rouge 

		Dé №2
Dé №1		

Modéliser l'expérience à l'aide du diagramme d'univers et montrer que les événemnets $A =$« dé Noir l'emporte »et $B =$« dé rouge l'emporte »sont équiprobables.

Exercice 4.7

Voir le corrigé

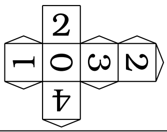
Soit l'expérience aléatoire « on lance deux dés équilibrés et on note la somme S des faces obtenues ». Pour chaque paire proposée :

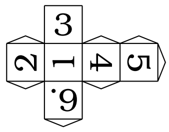
— Modéliser l'expérience à l'aide du diagramme d'univers.

— Identifier les valeurs possibles de la somme S.

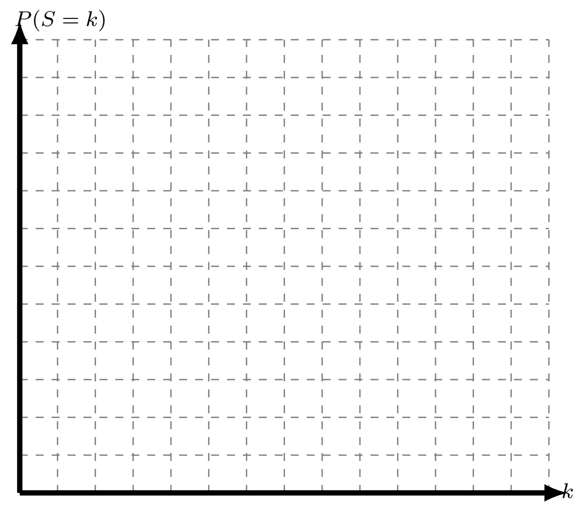
— Dresser le tableau représenant la loi de probabilité de la somme S.

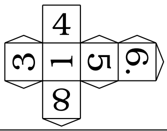
— Représenter graphiquement la loi de probabilité de la somme en précisant l'échelle.

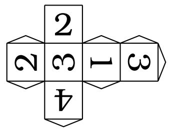
1. dé cubique rouge d6 de patron 

et un noir d6 standard 

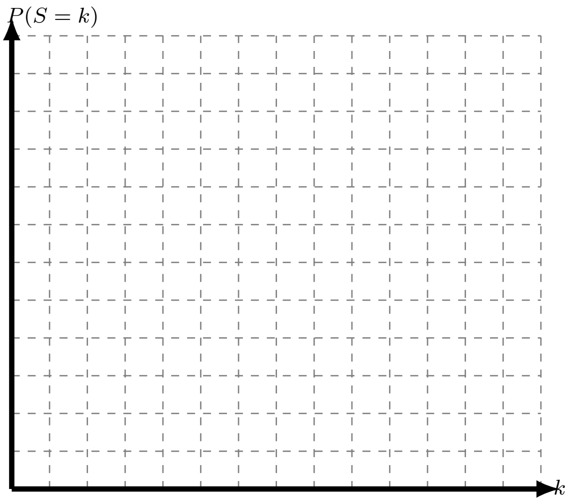
		Dé №2
Dé №1		



2. dés de Sicherman d6 de patron 

et un d6 

		Dé №2
Dé №1		



Exercice 4.8 — concepts. Voir le corrigé

Complétez les espaces. Les questions sont indépendantes.

1. $P(\Omega) =$ .... L'événement impossible est noté .... Sa probabilité est ....
2. Deux événements A et B sont disjoints lorsque ....
3. Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = \ldots\ldots + \ldots\ldots$
4. $\overline{B}$ est l'événement .... $P(\overline{B}) = 1-$..............................
5. Si $P(A) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$ et $P(B) = 0.5$ alors :

   $P(\overline{B}) = 1 - P(\ldots\ldots) =$ ....

   $P(A \cup B) = P(\ldots\ldots) + P(\ldots\ldots) - P(\ldots\ldots) =$ ....
6. Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont ...., et $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) =$................

   On peut écrire : $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$ ....
7. Si $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,3$ alors :

   $P(\overline{A}) = 1 - P(\ldots\ldots) =$ ....

   $P(\overline{A} \cap B) = P(\ldots\ldots\ldots) - P(\ldots\ldots\ldots) =$ ....

   $P(\overline{A} \cup B) = P(\ldots\ldots) + P(\ldots\ldots) - P(\ldots\ldots) =$ ....

Exercice 4.9 — Entrainement formules. Voir le corrigé

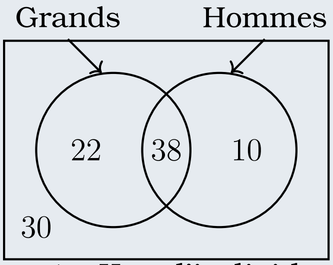
1. $P(E) = 0,34$, $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(E \cap F) = 0,23$. Calculer $P(F)$.
2. $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.6$ et $P(E \cup F) = 0.8$. Calculer $P(E \cap F)$
3. $P(E) = 0.3$, $P(\overline{F}) = 0.65$ et $P(E \cap F) = 0.2$. Calculer $P(E \cup F)$.
4. $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,24$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(\overline{E \cup F})$.

4.5.2 Exercices : Probabilités conditionnelles

Exemple 4.6

Une population de 100 individus est décrite par le diagramme de Venn ci-dessous.

On choisit au hasard un individu et on note son sexe et sa taille.



	H	$\overline{H}$	**Total**
G	38		
$\overline{G}$			
Total			100

1. Soit les événements $H =$« l'individu choisi est un homme » et $G =$ « l'individu choisi est grand ». Complétez le tableau croisé des effectifs.
2. a) L'univers des issues est $\Omega = \{GH, \quad , \quad , \quad \}$
   b) La probabilité que l'individu choisi soit grand est $P(\quad) =$
   c) La probabilité que l'individu choisi soit un homme est $P(\quad) =$
3. Complétez le tableau de la loi de probabilité P.

ω	GH	$G\overline{H}$	$\overline{G}H$	$\overline{G}\,\overline{H}$	Total
$P(\omega)$					1

4. a) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est un homme alors la probabilité que l'individu soit grand se note $P_H(G) =$
   b) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est un homme alors la probabilité que l'individu soit petit se note $P_H(\quad) =$
   c) $P_H(G) \ldots P(G)$, le sexe d'un individu *a une influence statistique* sur la taille.
5. Complétez le tableau de la loi de probabilité P_H *conditionnelle à l'événement* H.

ω	GH	$G\overline{H}$	$\overline{G}H$	$\overline{G}\,\overline{H}$	Total
$P_H(\omega)$					1

6. a) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est grand alors la probabilité que l'individu soit un homme se note $P_G(H) =$
   b) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est grand alors la probabilité que l'individu soit une femme se note $P_G(\quad) =$
   c) $P_G(H) \ldots P(H)$, la taille d'un individu .... sur le sexe
7. Complétez le tableau de la loi de probabilité P_G *conditionnelle à l'événement* G.

ω	GH	$G\overline{H}$	$\overline{G}H$	$\overline{G}\,\overline{H}$	Total
$P_G(\omega)$					1

Soit un événement A avec $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement E, *la probabilité conditionnelle sachant* A de E est donnée par :

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

■ **Exemple 4.7**

On lance deux pièces de monnaie numérotées et équilibrées et on note les faces obtenues.

1. L'univers est $\Omega = \{pp, \dots, \dots, \dots\}$, où la 1re lettre désigne la première pièce.

ω	pp				Total
$P(\omega)$					1

2. Compléter le tableau de la loi de probabilité de l'expérience aléatoire.
3. $A =$« une (au moins) des pièces est pile ». $P(A) =$..
4. $B =$« la première pièce est pile ». $P(B) =$..
5. $C =$« les faces sont différentes ». $P(C) =$..
6. La probabilité sachant A de l'événement pp est $P_A(pp) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} =$....................

   Sachant que ...., il y a 1 chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.
7. La probabilité sachant A de l'événement C est $P_A(C) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} =$....................

   Sachant que ...., il y a ...chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.

   $P_A(C) \dots P(C)$, l'événement C (est/n'est pas) indépendant de A.
8. Compléter le tableau de P_A, la loi conditionnelle sachant A.

ω	pp				Total
$P_A(\omega)$					1

9. La probabilité sachant B de l'événement pp est $P_B(pp) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} =$....................

   Sachant que ...., il y a 1 chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.
10. La probabilité sachant B de l'événement C est $P_B(C) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} =$....................

    Sachant que ...., il y a ...chance sur ...que l'autre pièce est face.

    $P_B(C) \dots P(C)$, l'événement C (est/n'est pas) indépendant de B.
11. Compléter le tableau de P_B, la loi conditionnelle sachant B.

ω	pp				Total
$P_B(\omega)$					1

Exercice 4.10

Voir le corrigé

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des essais sur 800 patients afin d'analyser l'efficacité de leurs tests de dépistage contre le sida. Soit les évènements M = « Le patient est séropositif. » et N = « Le test est négatif ». Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude. On choisit au hasard un résultat.

	(M) Séropositif	$(\overline{M})$ Séronégatif	Total
(N) Test négatif	3	441	444
$(\overline{N})$ Test positif	354	2	356
Total	357	443	800

1. $P(M) =$...... Il y a environ ...% de chance qu'un patient choisi au hasard soit séropositif.
2. $P(\quad) = 1 - P(M) =$..... Il y a environ 55% de chance q'un patient choisi au hasard .....
3. $P(\quad) = \dfrac{444}{800} \approx$ Il y a ...% de chance qu'un test choisi au hasard soit ....
4. $P(M \cap N) = \dfrac{\quad}{800} \approx$ Il y a ....
5. $P(\ldots \cup \ldots) = P(M) + P(N) - P(\ldots\ldots\ldots\ldots) =$..

   Il y a ....
6. $P_M(N) = \dfrac{P(\ldots \cap N)}{P(\ldots)} =$..

   Sachant que le patient est séropositif, il y a ...% de chance d'avoir un test négatif.
7. $P_{\overline{N}}(M) =$...

   Sachant que le test est positif, il y a ...% de chance que la personne soit séropositive.

Exercice 4.11

Voir le corrigé

Dans une rue, 10 maisons ont un chat (C), 8 ont un chien (D), 3 ont les 2, et 7 n'ont pas d'animaux.

1. Complétez le tableau à double entrée des effectis.
2. On choisit au hasard une maison.
   a) Quelle est la probabilité que la maison ait un chien ?
   b) Sachant que la maison a un chat, quelle est la probabilité que la maison ait un chien ?
   c) Calculer $P_D(C)$, $P_C(\overline{D})$ et $P_{\overline{C}}(D)$. Interpréter chaque valeur par une phrase.

	C	$\overline{C}$	**Total**
D			
$\overline{D}$			
Total			

Exercice 4.12

Voir le corrigé

On étudie la possession de smartphones (S) et tablettes (T) auprès d'un groupe d'étudiants. On choisit un élève au hasard.

1. Complétez le tableau croisé des effectifs.
2. Calculer les probabilités de posséder ...
   a) un smartphone sachant qu'on a une tablette.
   b) un smartphone sachant qu'on n'a pas de tablette.
   c) une tablette sachant qu'on a un smartphone.
   d) une tablette sachant qu'on n'a pas de smartphone.

	S	$\overline{S}$	**Total**
T	23	8	
$\overline{T}$	64	3	
Total			

Exercice 4.13

Voir le corrigé

Une enquête sur l'ensemble des clients d'un garage durant l'année passée, montre que 55% des acheteurs potentiels d'un modèle automobile souhaitent qu'il soit équipé d'un GPS intégré (G), 65% souhaitent la climatisation (C) et 30% souhaitent les deux.

On choisit au hasard une fiche de l'un des clients de ce garage.

1. Entourez les probabilités données dans l'énoncé :
   (A) $P(C)$ (B) $P(\overline{C})$ (C) $P(G)$ (D) $P(\overline{G})$ (E) $P(C \cap G)$ (F) $P(C \cap \overline{G})$ (G) $P(\overline{C} \cap G)$
2. Compléter le tableau des fréquences.
3. Traduire à l'aide de C, $\overline{C}$, G, $\overline{G}$, $\cap$ et $\cup$ les événements suivants et détérminez leurs probabilités.
   a) « Il ne souhaite pas de GPS intégré »
   b) « Il souhaite l'un des deux équipements »
4. Même question avec les événements :
   a) « Il souhaite un GPS sachant qu'il souhaite la climatisation »
   b) « Il ne souhaite pas un GPS sachant qu'il souhaite la climatisation »

	C	$\overline{C}$	**Total**
G			
$\overline{G}$			
Total			1

Exercice 4.14

Voir le corrigé

Lors d'une sortie scolaire les élèves devaient choisir entre faire du kayak (K) ou de l'accrobranche. 52% des élèves sont des garçons (G). 64% des élèves ont fait de l'accrobranche. 16% des élèves sont des filles ayant fait de l'accrobranche.

On choisit au hasard un élève de ce groupe.

1. Entourez les probabilités données dans l'énoncé :
   (A) $P(K)$ (B) $P(\overline{K})$ (C) $P(G)$ (D) $P(\overline{G})$ (E) $P(K \cap G)$
   (F) $P(K \cap \overline{G})$ (G) $P(\overline{K} \cap G)$ (H) $P(\overline{K} \cap \overline{G})$
2. Compléter le tableau des fréquences.
3. Traduire à l'aide de K, $\overline{K}$, G, $\overline{G}$, $\cap$ et $\cup$ les événements suivants

	K	$\overline{K}$	**Total**
G			
$\overline{G}$			
Total			1

et détérminez leurs probabilités.

a) « l'élève choisi a fait du kayak »

b) « l'élève choisi est un garçon qui a fait du kayak »

c) « l'élève choisi a fait du kayak sachant que c'est un garçon »

d) « l'élève choisi est un garçon sachant qu'il a fait du kayak »

4.5.3 Exercices : formule des probabilités composées

Exercice 4.15 — concepts. Voir le corrigé

A, B, C et D sont des événemnts de probabilité non nulle. Compléter :

1. Si $B \subset A$ alors $P_B(A) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \dfrac{P(\ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Si $P(A) = 0{,}22$, $P(B) = 0{,}42$ et $P(A \cap B) = 0{,}092\,4$, alors :
   $P_B(A) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_B(A) = P(A)$, donc l'événement .... est indépendant de l'événement ....
3. Si $P(C) = 0{,}59$, $P(D) = 0{,}25$ et $P(C \cap D) = 0{,}106\,2$, alors :
   $P_C(D) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_C(D) \ldots P(D)$, donc l'événement .... est défaborable à l'événement ....
4. Si $P(A) = 0{,}72$, $P(B) = 0{,}3$ et $P_B(A) = 0{,}75$ alors :
   $P(A \cap B) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_A(B) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. Si $P(C) = 0{,}5$, $P(D) = 0{,}12$ et $P_C(D) = 0{,}09$ alors :
   $P(C \cap D) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_D(C) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $P_A(B) + P_A(\ldots) = 1$
7. Vrai ou Faux ?

« $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$ »	« $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)$ »	« $P_{\overline{A}}(B \cup C) = P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(C)$ »

Exercice 4.16 — Entrainement formules. Voir le corrigé

1. $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}54$ et $P(A \cap B) = 0{,}405$. Calculer $P_A(B)$.
2. $P(A) = 0{,}77$, $P(B) = 0{,}19$ et $P_A(B) = 0{,}13$. Calculer $P_B(A)$.
3. $P(A) = 0{,}35$ et $P_A(B) = 0{,}42$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}82$. Calculer $P(A \cap B)$ et $P_A(\overline{B})$.
4. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}17$ et $P_B(A) = 0{,}24$. Calculer $P_A(B)$.
5. $P(A \cap B) = 0{,}18$ et $P_A(B) = 0{,}6$. Calculer $P(A)$.

Exercice 4.17 — **concepts.** Voir le corrigé

1. $P(L) = 0{,}17$, $P(M) = 0{,}12$ et $P(L \cap M) = 0{,}020\ 4$. Montrer que M est indépendant de L.
2. $P(X) = 0{,}3$, $P(Y) = 0{,}42$ et $P(X \cup Y) = 0{,}594$. Montrer que Y est indépendant de X.

Exercice 4.18 Voir le corrigé

Une batterie de missiles a une probabilité de $0{,}75$ d'atteindre une cible. La batterie a une probabilité de $0{,}65$ d'atteindre deux cibles successives. Quelle est la probabilité d'atteindre la deuxième cible sachant que la première cible est atteinte ?

Exercice 4.19 Voir le corrigé

Quark a 80% de chance de réussir son premier examen de Maths, et 45% de chance de réussir les deux premiers examens de maths. Quelle est la probabilité de réussir le second examen sachant qu'il a réussi le premier examen ?

4.5.4 Exercices : Indépendance de deux événements.

Exercice 4.20 Voir le corrigé

Cochez si les événements A et B sont indépendants ou non.

	Indépendants	Non indépendants
1/ $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(B) = \frac{2}{7}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.	☐	☐
2/ $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,9$.	☐	☐
3/ $P(A) = 0,48$, $P(B) = 0,25$. A et B sont incompatibles.	☐	☐
4/ $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,32$.	☐	☐

Exercice 4.21 Voir le corrigé

Les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,45$. Calculer $P(B)$.
2. $P(A) = P(B)$ et $P(A \cap B) = 0,25$. Calculer $P(A)$
3. $P(\overline{A}) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,3$. Calculer $P(A)$ puis $P(B)$.
4. $P(A) = 0.5$ et $P(B) = 0.7$, calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$

Exercice 4.22 Voir le corrigé

1. $P(X) = 0.5$, $P(Y) = 0.3$ et $P(X \cup Y) = 0.65$. Montrer que X et Y sont indépendants.
2. $P(X) = 0.3$, $P(Y) = 0.42$ et $P(X \cup Y) = 0.594$. Montrer que X et Y sont indépendants.

Exercice 4.23 Voir le corrigé

On lance un dé cubique équilibré. Soit les événements $A =$ « le résultat est $\geqslant 4$ » et $B =$ « le résultat est un nombre pair ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4.24

Voir le corrigé

On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (Carreau ♢ et Coeur ♡ sont de couleur rouge. Trèfle ♣ et Pique ♠) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit les événements $A =$ « la carte tirée est un roi », $B =$ « la carte tirée est un as » et $C =$ « la carte tirée est rouge »

1. Justifiez que les événements A et C sont indépendants.
2. Justifiez que les événements A et $\overline{B}$ ne sont pas indépendants.
3. Les événements $A \cup C$ et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4.25

Voir le corrigé

Les élèves d'un collège doivent choisir une option parmi « latin » et « théâtre » et une langue vivantes parmi « allemand » et « italien ». Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves.

	Italien	Allemand	Total
Latin	30	120	150
Théâtre	90	80	170
Total	120	200	320

1. Les événements « faire du théâtre et de l'italien » et « faire du théâtre » sont-ils indépendants ?
2. Les événements « faire du latin » et « faire de l'allemand » sont-ils indépendants ?
3. Les événements « faire du latin » et « faire du théâtre » sont-ils indépendants ?

Exercice 4.26 — paradoxe de Simpson.

Voir le corrigé

Un orchestre pratique une audition. Parmi les candidats jouant un instrument à vent, 26 des 40 hommes et 4 des 6 femmes ont été retenus. Parmi les candidats jouant un instrument à corde : 30 des 80 hommes et 19 des 49 femmes sont retenus.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">V</td><td colspan="2">$\overline{V}$</td><td rowspan="2">Total</td></tr>
<tr><td></td><td>S</td><td>$\overline{S}$</td><td>S</td><td>$\overline{S}$</td></tr>
<tr><td>F</td><td>4</td><td></td><td>19</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{F}$</td><td>26</td><td></td><td>30</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

On tire un candidat au hasard. Soit les événements $F =$ « être une femme », et $C =$ « jouer un instrument à corde », et $S =$ « succés à l'audition ».

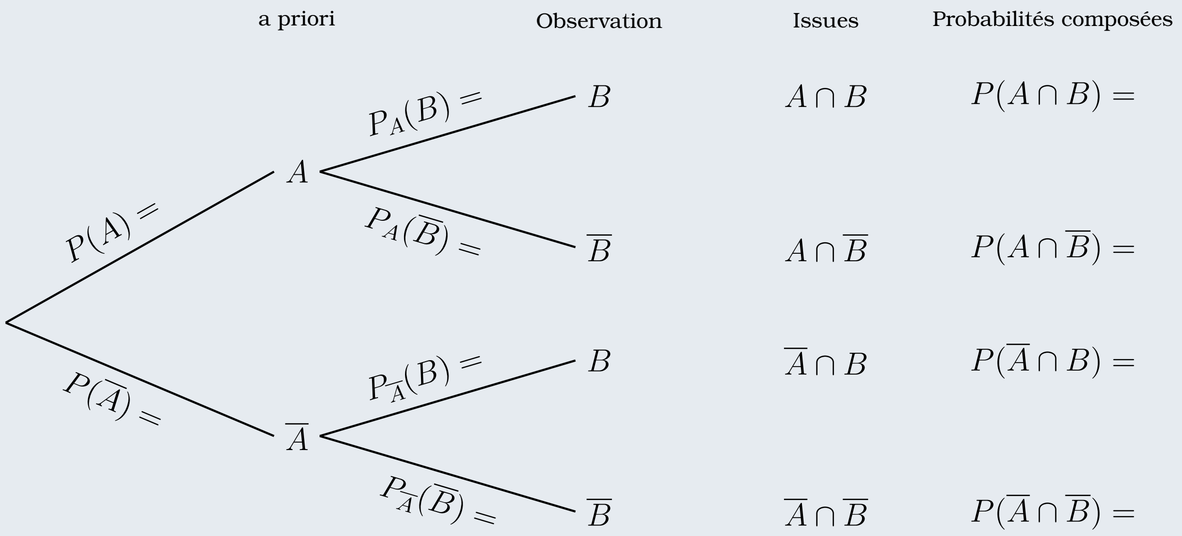
1. Compléter le tableau croisé des effectifs.
2. Calculer les probabilités $P_F(S)$ et $P_{\overline{F}}(S)$.
3. Quel sexe semble être légérement discriminé dans ces auditions ?

4. Calculer les probabilités $P_{F\cap C}(S)$, $P_{F\cap\overline{C}}(S)$, $P_{\overline{F}\cap C}(S)$ et $P_{\overline{F}\cap\overline{C}}(S)$.
5. Pour les musiciens jouant un instrument à corde, quel sexe semble être légérement durant ces auditions ? Même question pour les musiciens jouant un instrument à vent.

4.5.5 Exercices : modéliser à l'aide d'arbre de probabilités

■ **Exemple 4.8**

On dispose d'un lot d'urnes chacune contenant 3 boules indiscernables au toucher. Certaines urnes contiennent 2 boules Blanches et 1 Noire, d'autres contiennent 1 Blanche et 2 Noires.
On choisit au hasard une urne, et on tire une boule de cette urne.
Soit les événements $A =$« l'urne contient 2 Blanches et 1 Noire », et $B =$« la boule tirée est Blanche ». On suppose $P(A) = \frac{1}{2}$.



Formule des probabilités totales

$P(B) = P(\ldots\cap\ldots) + P(\ldots\cap\ldots)$

$=$

$=$

$=$

$P(\overline{B}) =$

$=$

$=$

$=$

Calcul des probabilités a posteriori

$$P_B(A) = \frac{P(\ldots\cap\ldots)}{P(\ldots\ldots)}$$

$$= \frac{P(\ldots)P_A(\ldots\ldots)}{P(\ldots\ldots)}$$

$=$

$=$

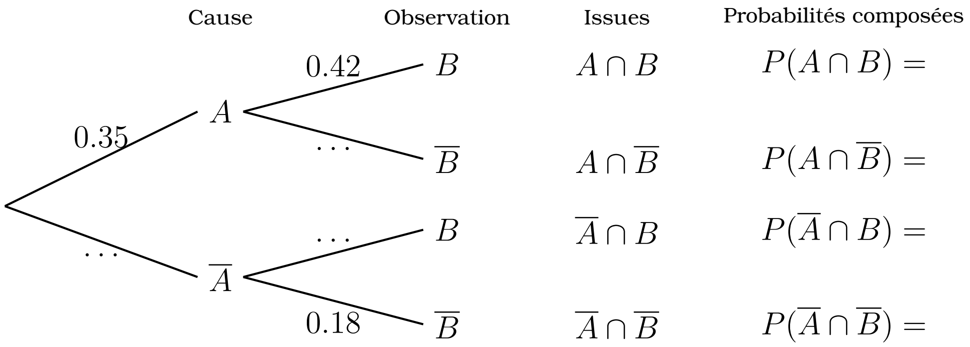
$P_B(\overline{A}) =$

$=$

$=$

Exercice 4.27 — interpéter et exploiter un arbre de probabilité. Voir le corrigé

Soit un univers Ω et une loi de probabilité P, et les événements A et B modélisés par l'arbre ci-dessous :



1. **Interpétation des données :** $P(\ldots) = 0.35$; $P_{\ldots}(\ldots) = 0.42$ et $P_{\ldots}(\ldots) = 0.18$.
2. **Compléter l'arbre de probablité** :

   $P(\overline{A}) = 1 - P(\ldots)$ $\qquad$ $P_A(\overline{B}) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$
3. **Calculer les probablités des issues** à l'aide de la formule des probabilités composés

   $P(A \cap B) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) =$ $\qquad$ $P(A \cap \overline{B}) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) =$

   $=$ $\qquad$ $=$

   $P(\overline{A} \cap B) =$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) =$

   $=$ $\qquad$ $=$
4. **Calculer les probablités totales :** arrondir à 10^{-2}

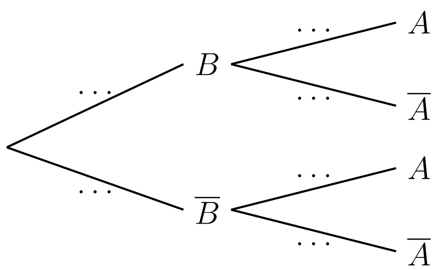
   $P(B) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots)$ $\qquad$ $P(\overline{B}) =$

   $=$ $\qquad$ $=$

   $=$ $\qquad$ $=$
5. **Inverser l'arbre :** calculer la probabilité sachant l'observation, de la cause

   $P_B(A) =$ $\qquad$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) =$

   $=$ $\qquad$ $=$
6. **Représenter l'arbre inverse**



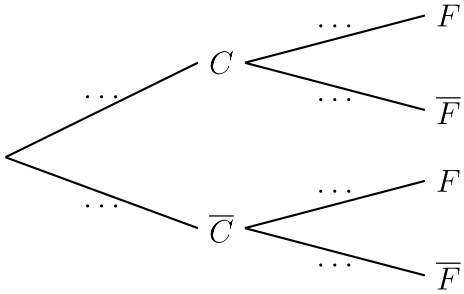
Exercice 4.28

Voir le corrigé

0.1% de la population est atteinte du cancer des poumons (C). 90% des personnes atteintes de cancer sont des fumeurs (F). 21% de ceux qui n'ont pas de cancer sont des fumeurs.

1. Identifier les probabilités données dans l'énoncé et ajouter les dans l'arbre de probabilité

   $P(\ldots) =$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) =$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) =$



2. Complétez l'arbre de probabilité en justifiant vos calculs :

   $P(\ldots) = 1 - P(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

3. Calculer les probabilités des événements :

   $P(C \cap F) =$

   $P(C \cap \overline{F}) =$

   $P(\overline{C} \cap F) =$

   $P(\overline{C} \cap \overline{F}) =$

4. Calculer la probabilité d'être un fumeur.

   $P(F) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) =$

5. Calculer la probabilité d'avoir le cancer sachant qu'on est un fumeur.

   $P_{\ldots}(\ldots) =$

6. Calculer la probabilité d'avoir le cancer sachant qu'on n'est pas un fumeur.

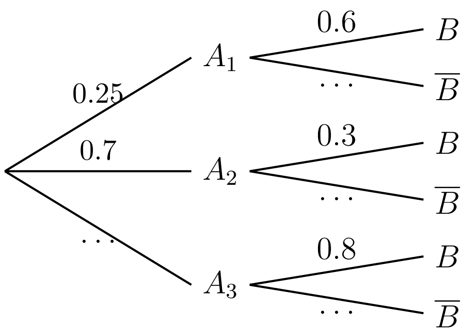
   $P_{\ldots}(\ldots) =$

7. Par combien est multiplié le risque de développer un cancer des poumons pour un fumeur ?

Exercice 4.29

Voir le corrigé

Une expérience aléatoire est modélisée par l'arbre ci-dessous. Calculer $P(B)$.



$P(A_3) =$

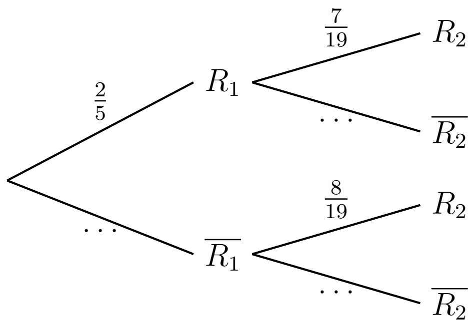
$$P(B) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots)$$
$$= P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) +$$
$$=$$
$$=$$

Exercice 4.30 — tirage sans remise.

Voir le corrigé

Une urne opaque contient des boules rouges et des boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur sans la remettre. On tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.

Soit les événement R_1 « la boule tirée au premier est rouge » et R_2 « la boule tirée au second tour est rouge ». On modélise l'expérience aléatoire par l'arbre de probabilité incomplet ci-dessous.



1. Identifier les probabilités données dans l'arbre :

   $P(\ldots) =$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) =$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) =$

2. Complétez l'arbre de probabilité en justifiant vos calculs :

   $P(\ldots) = 1 - P(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\overline{B}) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\overline{B}) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

3. Calculer la probabilité de tirer deux boules vertes.

   $P(\ldots \cap \ldots) =$

4. Calculer la probabilité que la boule tirée au second tour soit rouge.

   $P(\ldots) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) =$

   $=$

5. Calculer la probabilité de l'événement $A =$« tirer deux boules de couleurs différentes ».

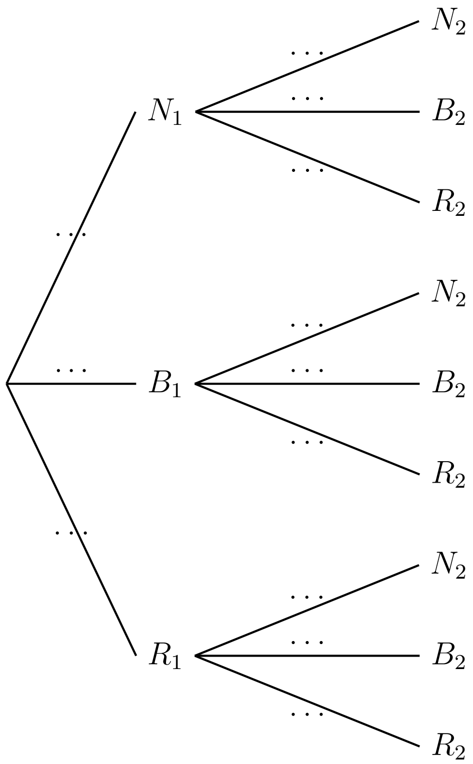
   $P(A) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) =$

Exercice 4.31 — **tirage sans remise.** Voir le corrigé

Une urne opaque contient 20 boules indiscernables au toucher : 8 Noires, 7 Blanches et 5 Rouges. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur sans la remettre, puis on tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.

Soit les événements N_1, B_1 et R_1 les événements correspondant à tirer une noir , une blanche et une boule rouge au premier tirage. De même les événements N_2, B_2 et R_2 correspondent aux résultats du second tirage.

Répondez aux questions en exprimant les événements à l'aide de N_i, B_i et R_i et en justifiant les calculs de probabilités.

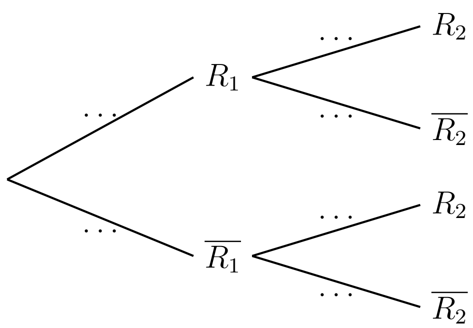


1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?
3. En déduire la probabilité de tirer une boule Blanche puis une boule Rouge ?
4. Quelle est la probabilité de tirer une boule Blanche et une boule Rouge ?
5. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit tirée au deuxième tirage ?

Exercice 4.32 — **tirage avec remise.** Voir le corrigé

Une urne opaque contient 11 boules rouges et 12 boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur avant de la remettre, puis on tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.

Soit les événements R_1 « la boule tirée au premier est rouge » et R_2 « la boule tirée au second tour est rouge ».



Répondez aux questions en exprimant les événements à l'aide de R_1 et R_2 et en justifiant les calculs de probabilités.

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit tirée au deuxième tirage ?
3. Justifiez que les événements R_1 et R_2 sont indépendants.

Exercice 4.33 — **le taxi et le témoin.** Voir le corrigé

Un taxi est accusé de délit de fuite. Au tribunal le témoin confirme que le taxi était de couleur bleue. En ville, 85% des taxis sont verts, et 15% sont bleus. Le procureur teste la fiabilité du témoin dans des conditions de luminosité similaires à la nuit de l'incident. Il constate que le témoin identifie la bonne couleur dans 80% des cas. Soit les événements suivants :

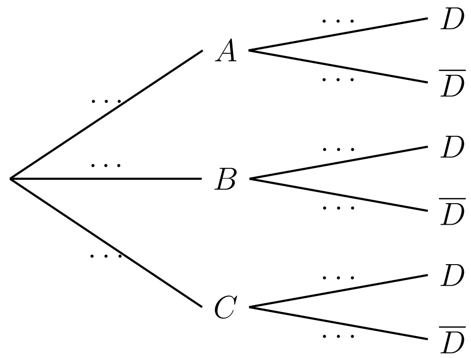
A: « le taxi est de couleur bleu »; B: « le témoin affirme que la couleur du taxi est bleue ».

1. D'après l'énoncé, que vaut $P_A(B)$? $P_{\overline{A}}(B)$?
2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3. Calculer la probabilité que le témoin affirme avoir vu un taxi bleu.
4. Quelle est la probabilité que le taxi soit vert sachant que le témoin affirme il est bleu ?

Exercice 4.34 Voir le corrigé

Un revendeur achète des pièces à trois fournisseurs A, B et C. 60% de son stock provient de A, 15% de B et le reste de C. 2% des pièces venant de A sont défectueuses, ainsi que 1% de celles venant de B et $0,5\%$ de celles qui viennent de C.

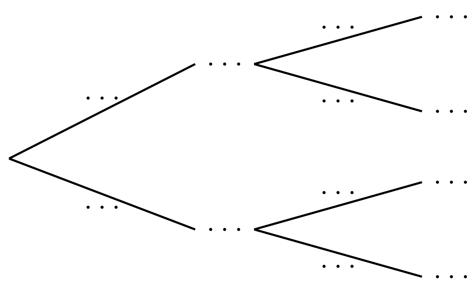
Chaque pièce est référencée. On tire au hasard l'une de ces références.



1. Complétez l'arbre de probabilité.
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?
3. Sachant que la pièce choisie est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A.

Exercice 4.35 Voir le corrigé

On dispose de deux urnes, A et B. L'urne A contient une boule rouge et trois vertes, et l'urne B contient 3 boules rouges et une verte. On lance un dé cubique équilibré pour choisir une urne : s'il tombe sur le 6, on tire une boule de l'urne A, sinon de l'urne B.



Soit les événements D « le dé tombe sur 6 », R « la boule tirée au premier est rouge » et V « la boule tirée au second tour est verte ».

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'une boule verte soit tirée.