Chapitre 5
Suites (1) généralités

Table 5.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 5…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
Définir et calculer les termes d'une suite …			
suites définies explicitement	5.1	5.6, 5.7	
suites définies par récurrence		5.2	
représenter une suite	5.4,	5.8, 5.9, 5.10, 5.11	
notion de limite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$			
Justifier un sens de variation			
variation par différence de termes consécutifs	5.5, 5.14, 5.15	5.16, 5.17, 5.18	
~~variation par ratio de termes consécutifs~~			
Algorithmique avec Python		5.3, 5.12	
Modélisation à l'aide de suites			
justifier une expression	5.19, 5.20, 5.21	5.22, 5.23	5.24, 5.25
résolution approchée d'équations par itération		5.26, 5.27	

5.1 Définition et premiers exemples

■ **Exemple 5.1 — liste infinie ordonnée.**

Une suite est une *liste infinie ordonnée et indexée* à l'aide d'entier naturels.

1. Suites ou la valeur du terme est exprimée en fonction de l'indice n :
   a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ des nombres entiers $(0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ldots)$.
   $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ des fractions de l'unité $\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ldots\right)$.
   v_0 n'est pas défini. $v_1 = 1$ $v_3 = \frac{1}{3}$; $v_n = \ldots\ldots\ldots$; $v_{n+1} = \ldots\ldots\ldots$ mais $v_n + 1 = \ldots\ldots\ldots$
   c) La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ des nombres pairs $(0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ \ldots)$.
   $w_0 = \ldots\ldots\ldots$ $w_1 = \ldots\ldots\ldots$ $w_2 = \ldots\ldots\ldots$; $w_n = \ldots\ldots\ldots$ et $w_{n-1} = \ldots\ldots\ldots$ mais $w_n - 1 = \ldots\ldots\ldots$
   d) La suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ des puissances de 2 : $(1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ \ldots)$.
   $p_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $p_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $p_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $p_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $p_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Suites où chaque terme est défini à partir du ou des termes précédents :
   a) La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ des factoriels : $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n = a_{n-1} \times n$.
   $a_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $a_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $a_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $a_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $a_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
   b) La suite des nombres triangulaires $(t_n)_{n\geqslant 0}$: $t_0 = 0$ et $n \geqslant 1$ on a $t_n = t_{n-1} + n$.
   $t_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $t_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $t_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $t_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $t_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
   c) La suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de Fibonacci $(0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 13\ ;\ 21\ ;\ \ldots)$
   Chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent : $F_{n+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $F_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $F_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $F_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;$F_8 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;$F_9 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
3. Suites définies de proche en proche, sans formules.
   a) La suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ ou τ_n est le nombre de diviseurs de n. oeis.org/A000005
   $\tau_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\tau_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\tau_{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;$\tau_{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\tau_{25} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
   b) La suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ *look-and-say* $(1\ ;\ 11\ ;\ 21\ ;\ 1211\ ;\ 111221\ ;\ 312211\ ;\ \ldots)$ oeis.org/A005150
   $c_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $c_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;$c_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) La suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ de Golomb est une suite croissante d'entier $g_1 = 1$ et pour $n \geqslant 2$, g_n est nombre d'occurences de l'entier n dans la suite. oeis.org/A001462
   Les premières termes sont $(1\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots)$
   $g_1 = 1$; $g_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $g_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $g_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;$g_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition 5.1

Soit n_0 un entier positif. Une fonction u définie pour tout entier $n \geqslant n_0$ est dite *suite* :

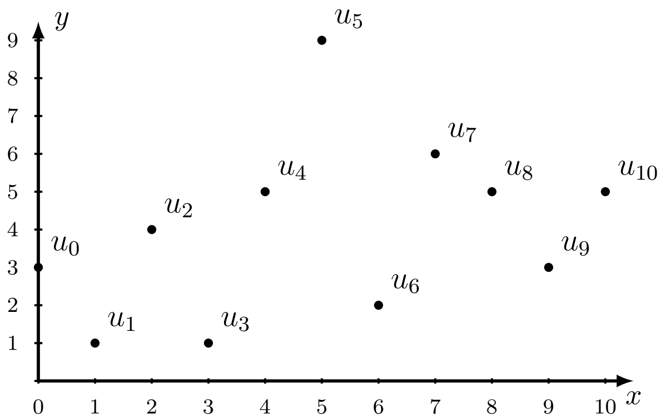
— u_{n_0} est le *premier terme* de la suite.

— pour tout entier $n \geqslant n_0$, on note u_n le *terme de rang* n (au lieu de $u(n)$).

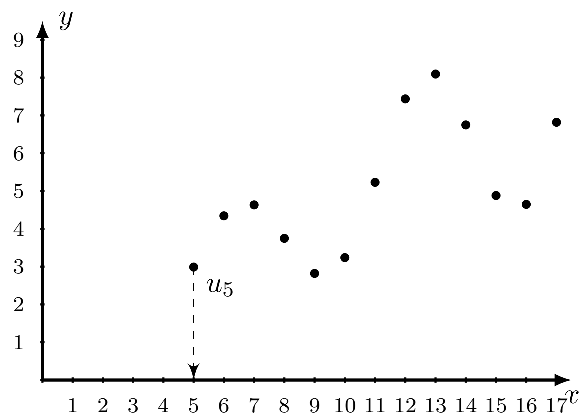
Il est d'usage de noter la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ou simplement (u_n).

Figure 5.1 – Représentations de suites (u_n) par le nuage de points $(n\ ;\ u_n)$: l'abscisse = rang du terme et l'ordonnée = valeur du terme

(a) Suite A000796 des décimales de $\pi \approx 3,141592653\dots$: $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, $u_4 = 5, \dots$



(b) Suite (u_n) définie pour $n \geqslant 5$, de premier terme de rang 5 : $u_5 = 3$



R Il est d'usage aux EU de désigner le premier terme de la suite par u_1. Le $n-$ᵉterme de la suite est alors le terme de rang n. Il est cependant d'usage en France de désigner (losrque c'est possible) le premier terme de la suite par u_0.

5.2 Modes de générations de suites

Définition 5.2 La suite (u_n) est définie de façon *explicite* si son terme général u_n s'exprime en fonction de n : $u_n = f(n)$.

■ **Exemple 5.2 — suites définies de façon explicite.**

1. (u_n) de terme général $u_n = 3n + 5$. On a $u_{10} = 3(10) + 5 = 35$.
2. (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. On a $v_5 = \dfrac{2(5)-1}{(5)+1} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.

Script 5.1 – Fonction d'argument n qui renvoie u_n

```
def u(n) :
    terme = 3*n+5
    return terme
```

Script 5.2 – Fonction d'argument n qui renvoie v_n

```
def v(n) :
    terme = ...
    return ...
```

Définition 5.3

Lorsque le terme général u_n dépend du et des terme(s) précédent(s), on définit la suite (u_n) par une *relation de récurrence* et par plusieurs premier(s) terme(s) :

— récurrence à un terme : u_0 et $\forall n$: $u_{n+1} = f(u_n)$

— récurrence à deux termes : u_0, u_1 et $\forall n$: $u_{n+2} = f(u_n\ , u_{n+1})$

Exemple 5.3

Calculer les 5 premiers termes de (a_n) définie par $\begin{cases} a_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 2 \quad a_n = 3(a_{n-1} + 2) \end{cases}$

solution.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3(1 + 2) = 9$$
$$a_3 = 3(9 + 2) = 33$$
$$a_4 = 3(33 + 2) = 105$$
$$a_5 = 3(105 + 2) = 321$$

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

terme suivant   terme actuel ■

Script 5.3 – Fonction d'argument n et qui renvoie ...

```
def a(n) :
    a = 1                    # variable a initialisée à 4,
    for i in range(n) :      # n répétitions
        a = 3*(a+2)          # a contient la valeur du terme suivant
    return v                 # retourne le terme de rang ....
```

Exemple 5.4

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n) défiie par ses deux premiers termes $u_0 = 12$ et $u + 1 = 31$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

solution.

$$a_1 = 12$$
$$a_2 = 31$$
$$a_3 = 5\ (31) - 6(12) = 83$$
$$a_4 = 5\ (83) - 6(31)$$

$$u_{n+2} = 5\ a_{n+1} - 6\ a_n$$

terme suivant   termes précédents ■

5.3 Propriétés de suites

Définition 5.4 — Variations d'une suite.

Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

— (u_n) est *croissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$:

$$\forall n \geqslant n_0 : \quad u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \ldots \geqslant u_{n_0}$$

— (u_n) est *décroissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$:

$$\forall n \geqslant n_0 : \quad u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0}$$

— (u_n) est *stationnaire* à partir de n_0 si :

$$\forall n \geqslant n_0 : \quad u_{n+1} = u_n = \ldots u_{n_0}$$

Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites *monotones*.

Définition 5.5 — (naive) limite finie, suite convergente.

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. Si les termes u_n se rapprochent d'une valeur réelle $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini on dira que ℓ est la limite de la suite (u_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*.

Une suite qui ne converge par vers un réel est dite *divergente*.

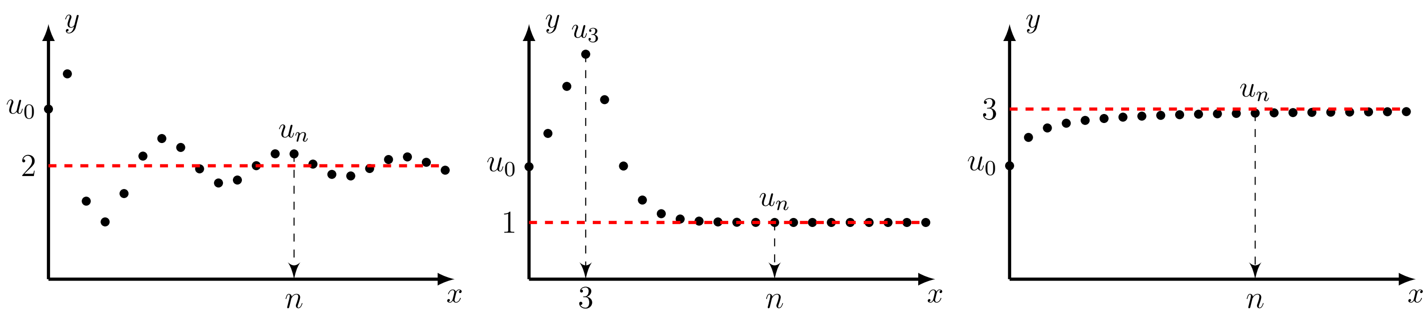


Figure 5.2 – (à gauche) Suite non monotone et convergente vers $\ell = 2$: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$
(centre) Suite décroissante à partir de $N = 3$, et convergente vers $\ell = 1$: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$
(à droite) Suite croissante, et convergente vers $\ell = 3$: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

Définition 5.6 — (naive) limite infinie.

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. Si les termes u_n deviennent « aussi grands que l'on veut et le restent » lorsque n augmente on dira que la suite (u_n) *diverge* vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

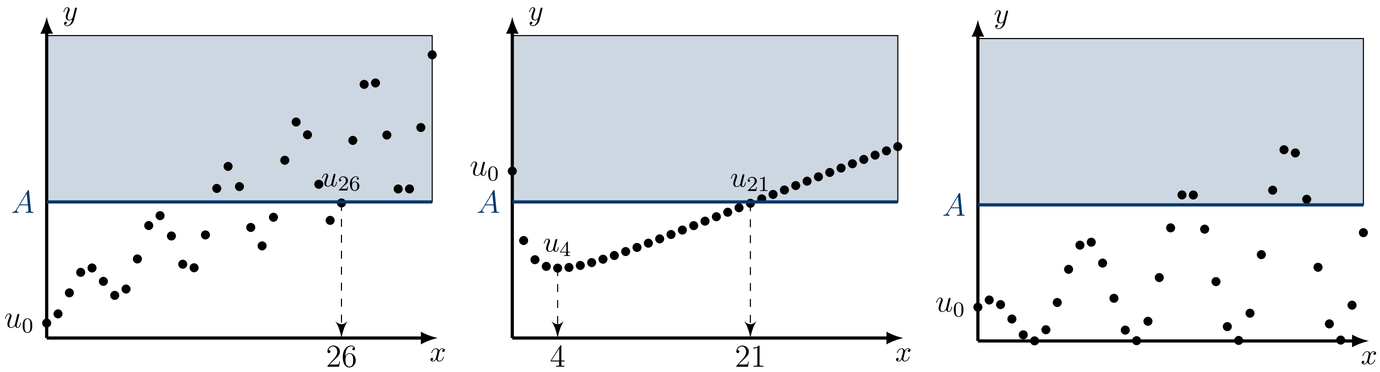


Figure 5.3 – (à gauche) Suite non monotone et divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
(centre) Suite croissante à partir de $N = 4$, et divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
(à droite) Suite non monotone et divergente, sans limite en $n \to +\infty$

R La définition s'étend aussi pour une suite qui diverge vers $-\infty$. Les suites ayant une limite infinie $+\infty$ (ou $-\infty$) ainsi que les suites qui n'ont pas de limite sont les suites divergentes.

5.4 Justifier le sens de variation

Méthode n° 1 la plus directe

Étudier les variations d'une suite revient souvent à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ [1] :

— (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

— (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Méthode n° 2 variation d'une suite positive

Soit (u_n) une suite *strictement positive* et n_0 un entier naturel.

— (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

— (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Méthode n° 3 variation d'une suite définie de façon explicite par $u_n = f(n)$

Le sens de variation de la suite (u_n) peut se déduire des variations de f sur $[0; +\infty[$.

Méthode n° 4 variation de suites de référence

Sera abordé dans un prochain chapitre.

Méthode n° 5 variation d'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

laissé pour la classe de terminale

[1] La suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est la suite dérivée de la suite (u_n).

5.5 Exercices

■ **Exemple 5.5**

Calculer les 4 premiers termes et le terme d'indice 100 des suites :

1. (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = n^2 - 1$.
2. (v_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $v_n = 2n - 1$.

solution.

terme d'indice n	domaine	les premiers 4 termes	terme d'indice 100
$u_n = n^2 - 1$	$n \geqslant 1$	$u_1 = (1)^2 - 1 = 0$ $u_2 = (2)^2 - 1 = 3$ $u_3 = (3)^2 - 1 = 7$ $u_4 = (4)^2 - 1 = 15$	$u_{100} = 9999$
$v_n = 2n - 1$	$n \geqslant 0$	$v_0 = 2(0) - 1 = -1$ $v_1 = 2(1) - 1 = 1$ $v_2 = 3$ $v_3 = 5$	$v_{100} = 199$
$t_n = \dfrac{n}{n+1}$	$n \geqslant 0$		
$r_n = \dfrac{(1-)^n}{2^n}$	$n \geqslant 1$		

■

Exercice 5.1 Voir le corrigé

Calculer les 4 premiers termes ainsi que le terme d'indice 100 des suites suivantes :

1. (a_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $a_n = n - 3$.
2. (b_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $b_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
3. (c_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $c_n = 5^n$.
4. (d_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
5. (e_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $d_n = 1 + (-1)^n$.
6. (f_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $f_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{n+1}$.

■ **Exemple 5.6**

Calculer les valeurs exactes des 3 premiers termes des suites ci-dessous :

1. (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$.
2. (v_n) définie par $v_1 = 3$ et pour $n \geqslant 1$ $v_{n+1} = \dfrac{4n}{5-v_n}$.

solution.

1. $u_0 = 1$

$$u_1 = \frac{9}{6-u_0} = \frac{9}{6-1} = \frac{9}{5}$$
$$u_2 = \frac{9}{6-u_1} = \frac{9}{6-\frac{9}{5}} = \frac{15}{7}$$

■

Exercice 5.2

Voir le corrigé

Calculer les 4 premiers termes des suites suivantes :

1. $\begin{cases} a_0 = 4 \\ \text{pour tout } n \geqslant 0 \ a_{n+1} = 2(a_n + 3) \end{cases}$
2. $\begin{cases} b_1 = -24 \\ \text{pour tout } n \geqslant 2 \ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{6} \end{cases}$
3. $\begin{cases} c_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 2 \ c_n = \dfrac{1}{1+c_{n-1}} \end{cases}$
4. $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \geqslant 0 \ d_{n+1} = 2d_n + 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} e_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \geqslant 0 \ e_{n+1} = \dfrac{e_n + n}{e_n} \end{cases}$
6. $\begin{cases} f_1 = 1 \quad f_2 = 2 \\ \text{pour tout } n \geqslant 1 \ f_{n+2} = f_{n+1} - f_n \end{cases}$

■ **Exemple 5.7 — une suite donnée par un algorithme.**

Script 5.4 – Fonction qui renvoie le terme de rang n

```python
def calcul(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 2u + 1
    return u
```

1. (u_n) est définie
   (A) de façon explicite
   (B) par récurrence
2. $u_0 = 3$ et $u_n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
3. $u_{10} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Script 5.5 – Fonction qui renvoie le terme de rang n

```python
def calcul(n) :
    u = n**2-1
    return u
```

1. (u_n) est définie (A) de façon explicite
   (B) par récurrence
2. $u_0 = \dots\dots\dots\dots$ et $u_n = \dots\dots\dots\dots$
3. $u_{10} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 5.3

Voir le corrigé

Les scripts ci-dessous permette de calculer le terme de rang n d'une suite (u_n). Compléter les espaces dans chaque cas.

1.

```python
def calcul(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 1.7*u-2
    return u
```

a) (u_n) est définie (A) de façon explicite (B) par récurrence

b) $u_0 = \ldots$ et $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) calcul(10) renvoie $u_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.

```python
def calcul(n) :
    u = 4
    for i in range(n) :
        u = ...
    return u
```

a) (v_n) est définie (A) de façon explicite (B) par récurrence

b) $v_0 = \ldots$ et $v_{n+1} = 5v_n - 2n$

c) calcul(10) renvoie $v_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3.

```python
def calcul(n) :
    u = 5
    for i in range(...) :
        u = ...
    return u
```

a) (w_n) est définie (A) de façon explicite (B) par récurrence

b) $w_0 = \ldots$ et $w_{n+1} = n - 6w_n$

c) calcul(10) renvoie $w_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4.

```python
def calcul(n) :
    u = ...
    for i in range(...) :
        u = ...
    return u
```

a) (u_n) est définie (A) de façon explicite (B) par récurrence

b) $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

c) calcul(10) renvoie $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5.

```python
def calcul(n) :
    u = -8
    for i in range(n+1) :
        u = (1/2)*u-5
    return u
```

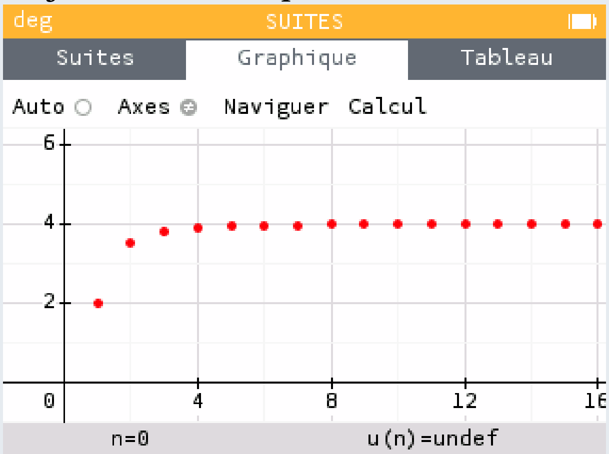
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -9$ et pour tout $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$.

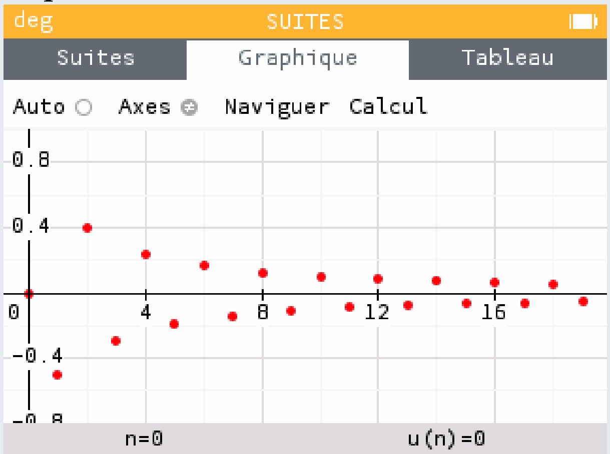
Affirmation : « Dans le Script ci-contre, l'instruction calcul(n)renvoie le terme u_n »

(A) Vrai (B) Faux

■ **Exemple 5.8 — conjecturer le comportement d'une suite.**

Conjecturer le comportement des suites (u_n) et (v_n) représentées ci-dessous :





(u_n) est croissante : $u_{n+1} > u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$

(v_n) n'est pas monotone (ni croissante, ni décroissante.) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice 5.4 Voir le corrigé

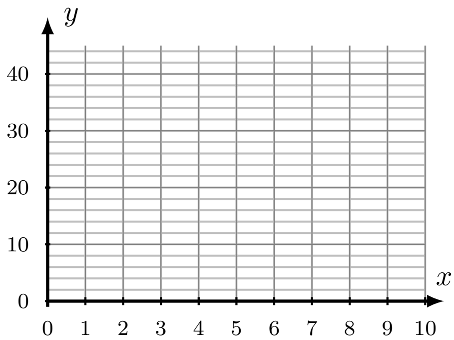
Après avoir calculé les 10 premiers termes et représenté chaque suite par un nuage de point, choisir et compléter les bonnes réponses.

1. la suite (a_n) donnée par $n \geqslant 0$: $a_n = 4n + 3$ est

   (A) croissante — (A) convergente vers ....

   (B) décroissante — (B) divergente vers .....

   (C) non monotone — (C) diverge sans limite

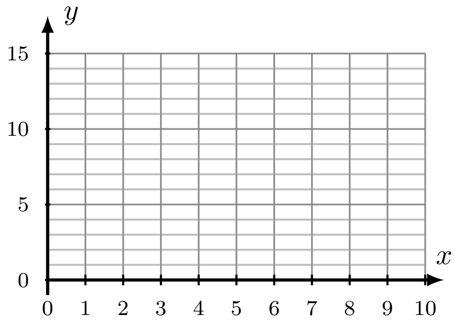


2. la suite (b_n) donnée par $n \geqslant 1$: $b_n = \frac{12}{n}$ est

   (A) croissante — (A) convergente vers ....

   (B) décroissante — (B) divergente vers .....

   (C) non monotone — (C) diverge sans limite

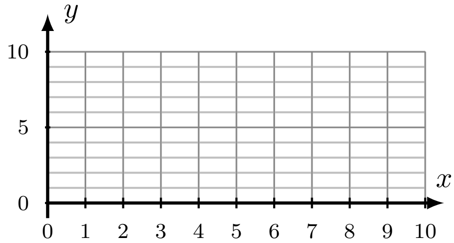


3. la suite (c_n) donnée par $n \geqslant 1$: $n \geqslant 0$: $c_n = 4 - 2(-1)^n$ est

   (A) croissante — (A) convergente vers ....

   (B) décroissante — (B) divergente vers .....

   (C) non monotone — (C) diverge sans limite

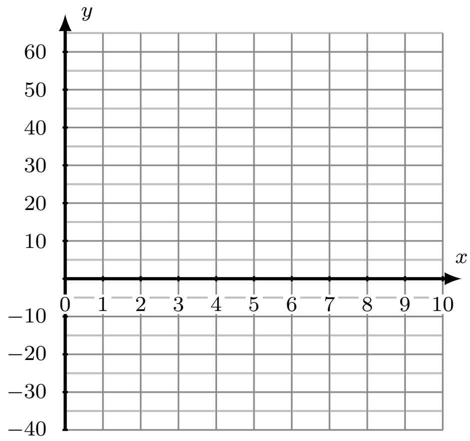


4. la suite (d_n) donnée par $n \geqslant 1 : n \geqslant 0 : d_n = (-1)^n n^2 + n$ est

(A) croissante (A) convergente vers ....

(B) décroissante (B) divergente vers .....

(C) non monotone (C) diverge sans limite

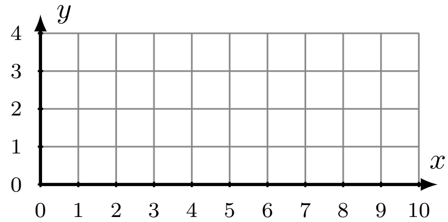


5. la suite (e_n) donnée par $e_1 = 2$, et $n \geqslant 1 : e_{n+1} = \dfrac{1}{e_n}$ est

(A) croissante (A) convergente vers ....

(B) décroissante (B) divergente vers .....

(C) non monotone (C) diverge sans limite

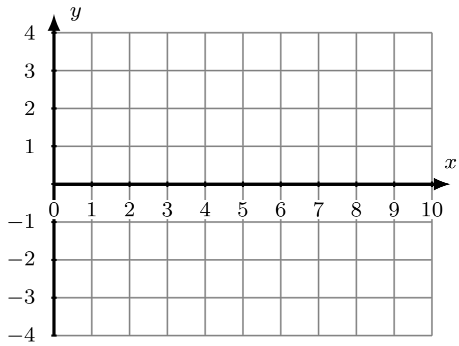


6. la suite (f_n) donnée par $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ et $n \geqslant 3 : f_n = f_{n-1} - f_{n-2}$ est

(A) croissante (A) convergente vers ....

(B) décroissante (B) divergente vers .....

(C) non monotone (C) diverge sans limite



Exercice 5.5 Voir le corrigé

À l'aide de la calculatrice, conjecturez le sens de variation et la limite des suites (u_n) :

1. pour tout $n \geqslant 0 : a_n = -3n + 5$
2. pour tout $n \geqslant 0 : b_n = 5 - 0.75^n$
3. pour tout $n \geqslant 0 : c_n = 1.5^n - 100$
4. pour tout $n \geqslant 1 : d_n = \dfrac{1}{n}$
5. pour tout $n \geqslant 0 : e_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$
6. pour tout $n \geqslant 0 : f_n = \dfrac{5n-2}{3n+1}$

Exercice 5.6 Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = n^2 - n + 1$

1. Déterminer algébriquement le rang n du terme tel que $u_n = 133$.
2. La suite admet-elle un terme égal à 400 ? Justifier.

Exercice 5.7 Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{n-2}{2n-1}$.

Déterminer algébriquement les rangs n pour lesquels $u_n = 0{,}48$.

■ **Exemple 5.9 — diagrammes en escalier ou représentation de Poincaré (*Poincaré plot*).**

Pour des suites définies par une relation de récurrence à un terme $u_{n+1} = f(u_n)$, *il est pratique d'utiliser une représentation par un nuage de points* $(u_n \ ; \ u_{n+1})$ *tous situés sur la courbe* $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ *représentant la fonction* f.

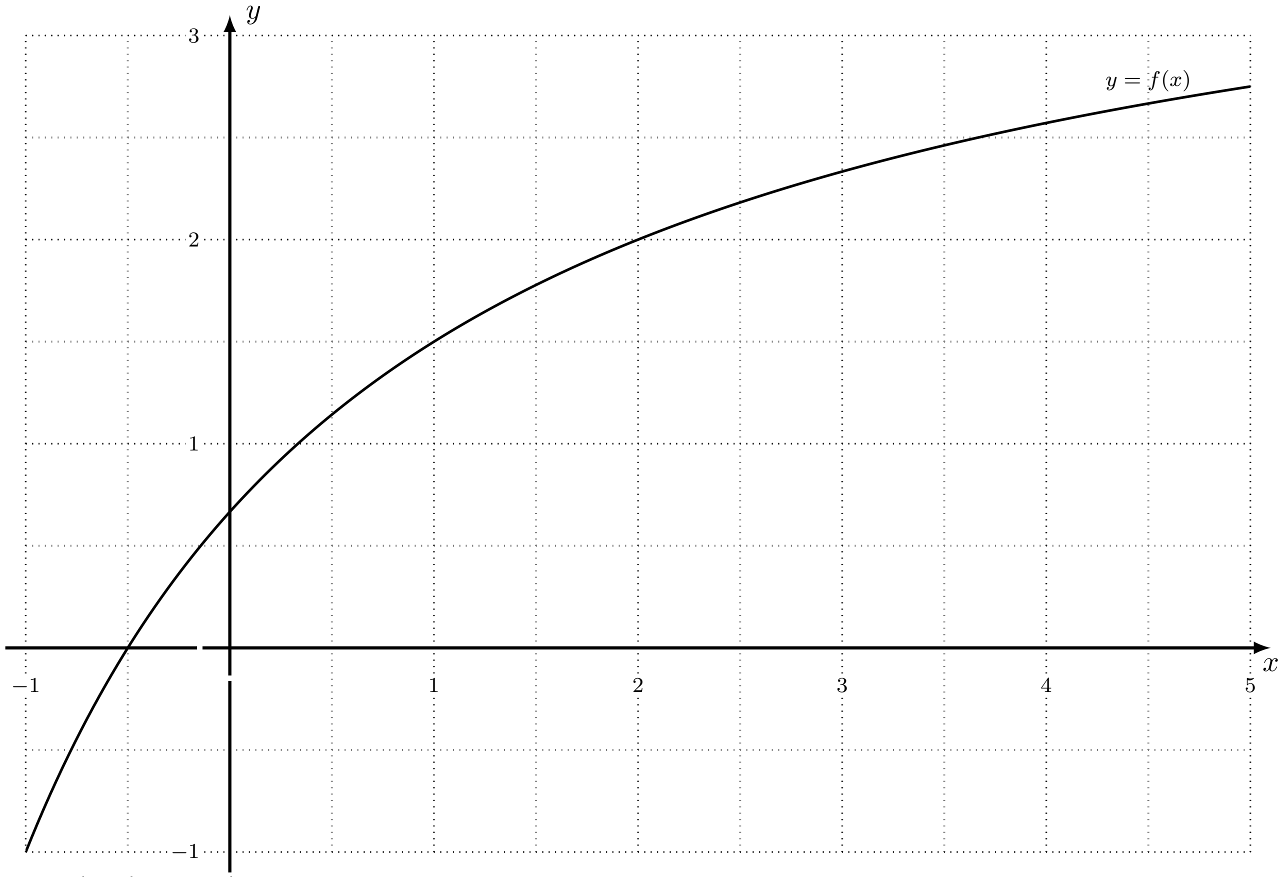
Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes et conjecturer le sens de variation et les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0.2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$$

Exercice 5.8

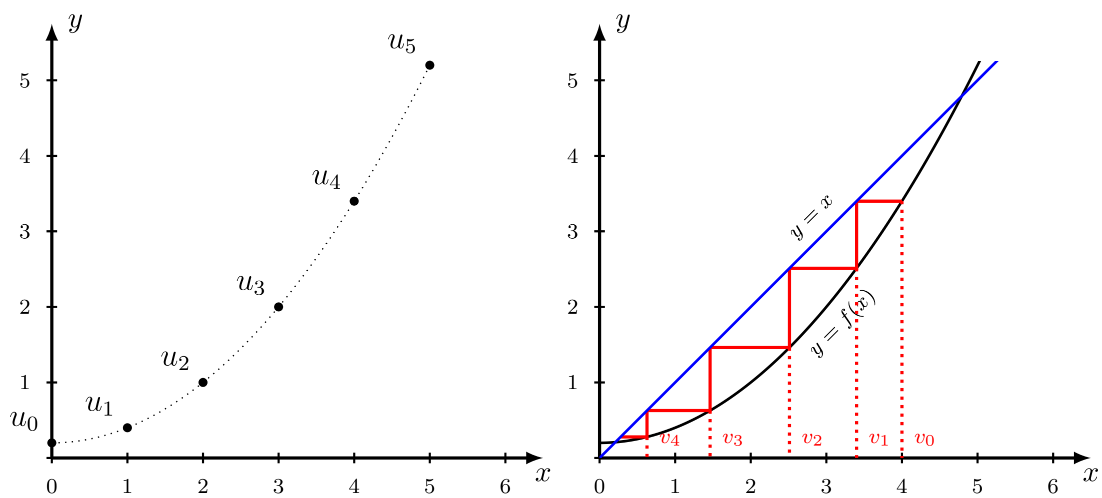
Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la définie sur $[-1; +\infty[$ représentée ci-dessous.



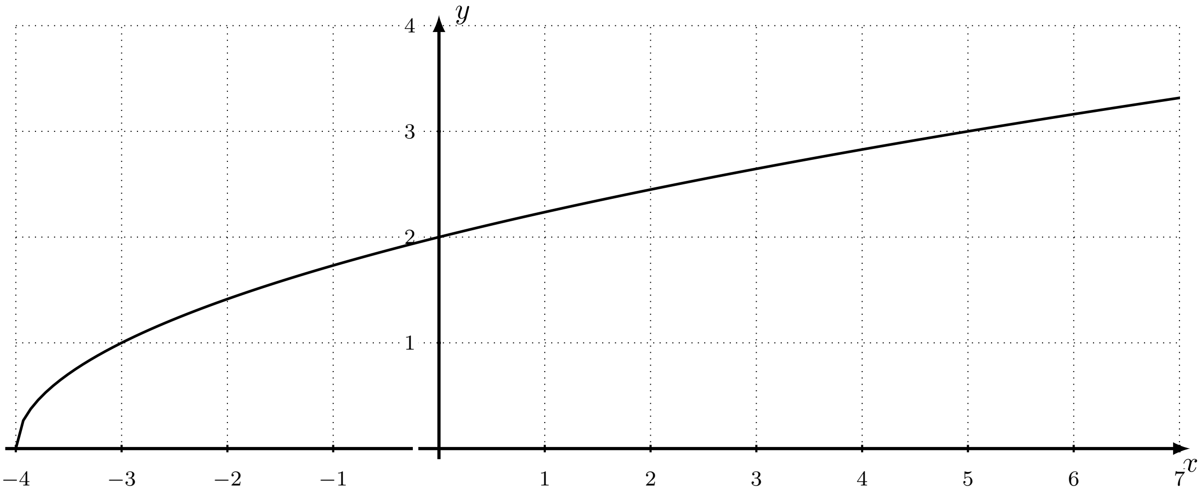
1. Tracer la droite d'équation $y = x$
2. Dans cette question $a = 4$. Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite.
3. Même question pour $a = 0$.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de a la suite (u_n) est stationnaire ?

Figure 5.4 – Distinguer la représentation de la suite (u_n) définie de façon explicite par $u_n = f(n)$ (**à gauche**) et celle de la suite (v_n) définie par récurrence par $v_0 = 4$ et $\forall n \geqslant 0$: $v_{n+1} = f(v_n)$(**à droite**)



Exercice 5.9 — d'après Concours Avenir 2016. Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f définie sur $[-4; +\infty[$ est représentée ci-dessous.



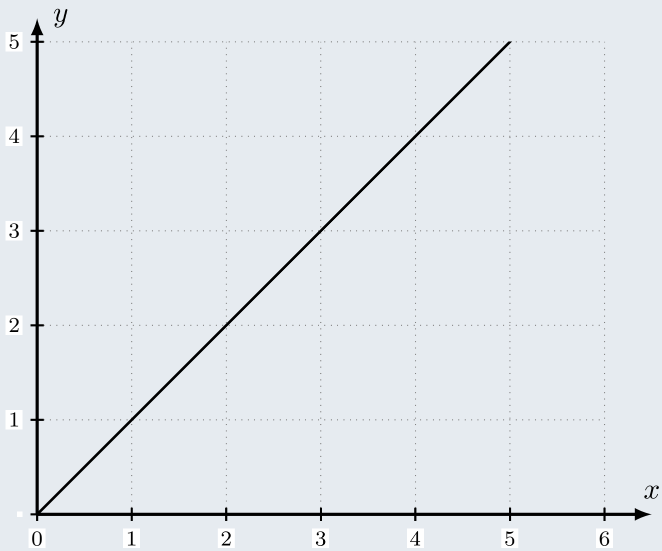
1. Tracer la droite d'équation $y = x$.
2. Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n).
3. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
4. La suite (u_n) :

☐ converge vers 2 | ☐ diverge vers $+\infty$ | ☐ converge vers -4 | ☐ converge vers $\ell > 2$

■ **Exemple 5.10 — cas d'une fonction f décroissante.** Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 5$.

1. Représenter ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 5$.



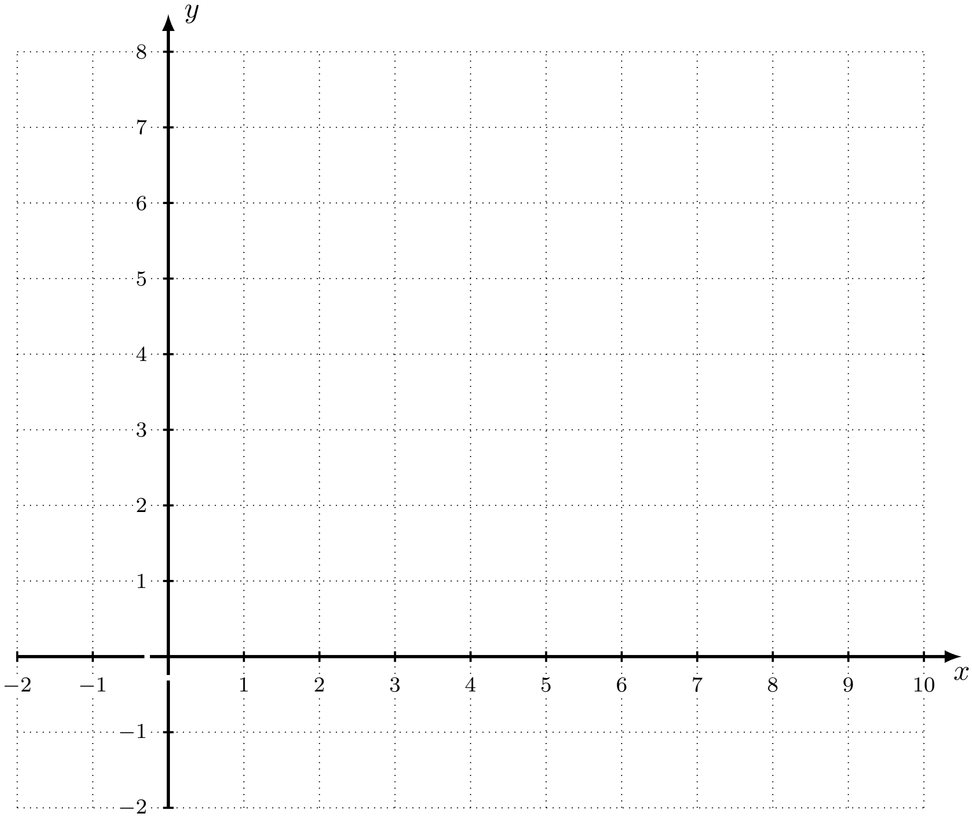
2. Représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (u_n).
3. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n)

Exercice 5.10

Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = 5 - \dfrac{3}{4}u_n$.

1. Tracer les droites d et d' d'equations respectives $y = -\dfrac{3}{4}x + 5$ et $y = x$.
2. En déduire une construction des 5 premiers termes de la suite (u_n).
3. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et une valeur approchée de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. On admet que la limite ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

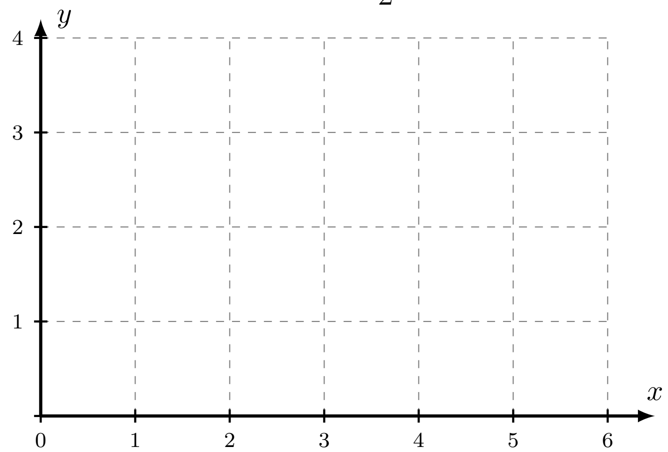


Exercice 5.11

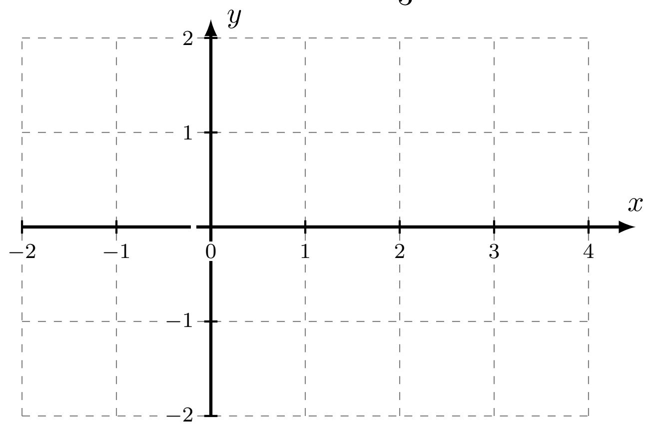
Voir le corrigé

Représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes des suites suivantes et conjecturez leur sens de variation et limite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ (on résoudra si nécessaire l'équation $f(\ell) = \ell$).

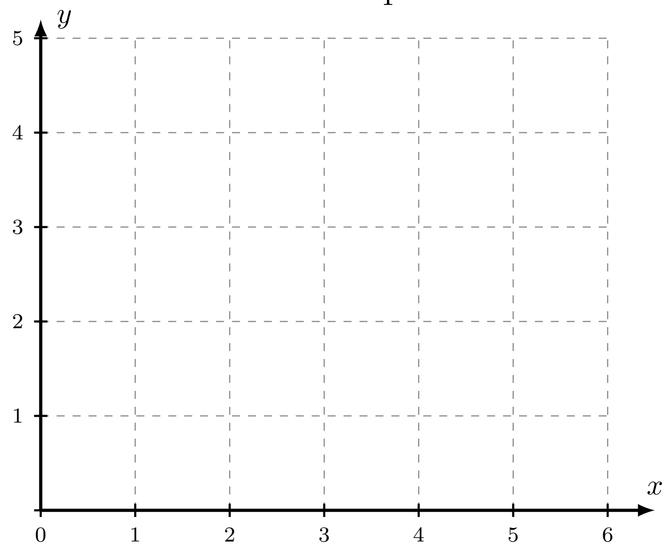
1. $u_0 = 5$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$.



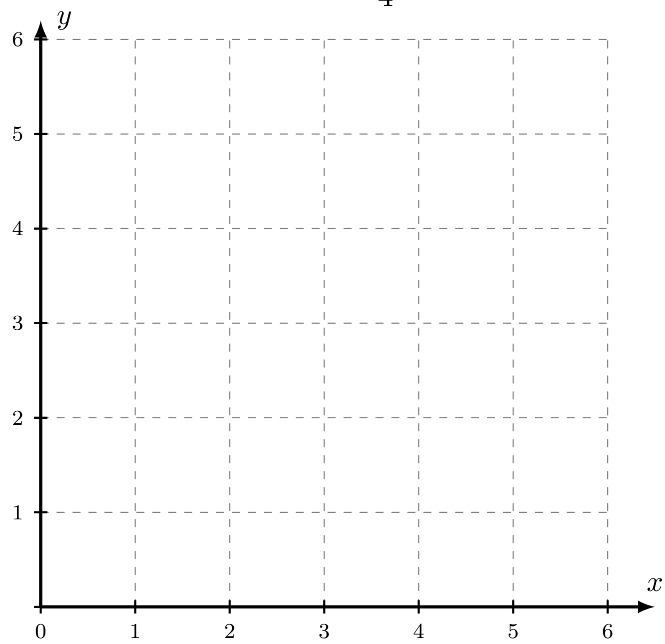
2. $u_0 = 3$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n$.



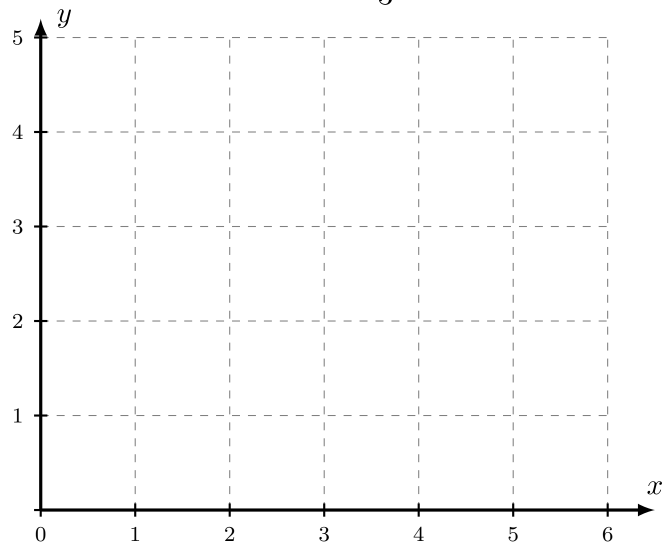
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{5}{4}u_n$.



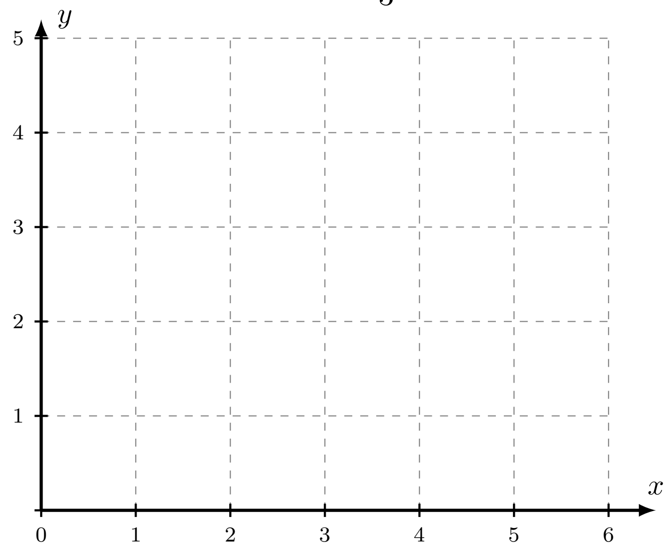
4. $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{5}{4}u_n + 1$.



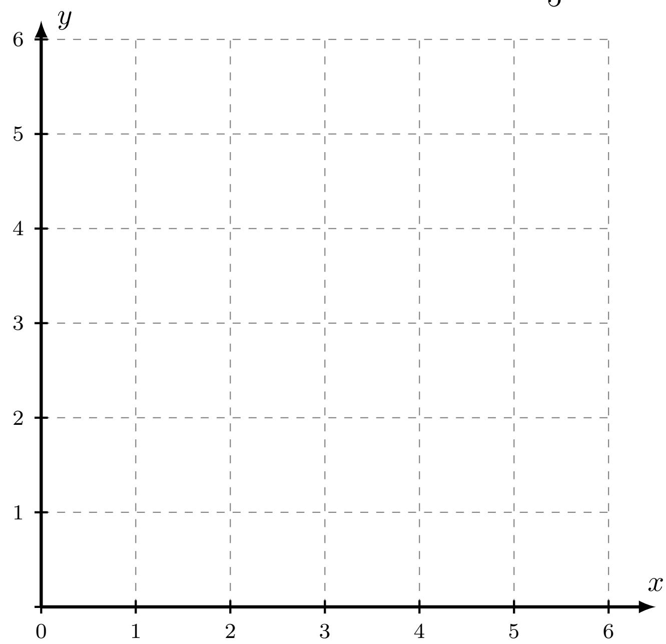
5. $u_0 = 6$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.



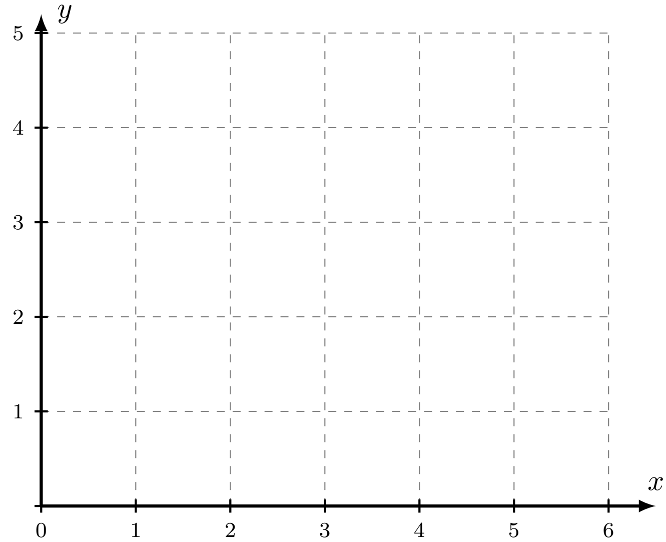
6. $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.



7. $u_0 = 5$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = -\dfrac{4}{5}u_n + 6$.



8. $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 4$.



Nous admettons que pour toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et convergente vers une limite (finie) ℓ, alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.

On dit que ℓ est un *point fixe* de la fonction f.

Exercice 5.12 — Algorithme de Babylonne. Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$

1. Tracer le diagramme en escalier de la suite (u_n) sur la calculatrice.
2. Conjecturer le sens de variation et l'existence d'une limite de la suite (u_n).
3. On admet que (u_n) converge vers $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Déterminer la valeur exacte de ℓ.
4. Compléter le script de la fonction `u()` qui prend pour paramètre `n` et renvoie la valeur de u_n :

```
def u(n) :
    u = ...
    for i in range(...) :
        u = ...
    return u
```

■ **Exemple 5.11 — algorithmes avec un test.**

On admet que la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = 0.5u_n + 3$ est croissante et converge vers $\ell = 6$. Compléter le script afin qu'il affiche *le premier rang* p à partir duquel $u_n > 5.999$

```
1 u = ...                  # initialisation de la suite à u0 = 1.
2 p = ...                  # initialisation du rang à p = ...
3 while u ... 5.999 :      # la boucle doit se poursuivre si un ... 5.999
4     u = ...              # calcul du terme suivant de la suite
5     p = p + 1            # rang du terme calculé à la ligne 4
6 print(...)               # afficher la valeur de ... en sortie de boucle
```

On admet que la suite définie par $v_1 = 10$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = 0.6u_n + 2$ est décroissante et converge vers $\ell = 5$. Compléter le script afin qu'il affiche *le premier rang* p à partir duquel $u_n < 5.001$.

Le script affiche :........................

```
u =
p =
while
    u =
    p =
print(   )
```

Exercice 5.13 — réviser les boucles non bornées.

1. a) La suite (u_n) définie par $u_n = 0.81^n$ est

   ☐ décroissante et converge vers 0 | ☐ croissante et diverge vers $+\infty$

```
n=1
while 0.81**n > 0.5 :
    n = n+1
print(n)
```

   b) Le script ci-dessus affiche

   ☐ Le plus grand entier n tel que $0.85^n > 0.5$ | ☐ Rien car il ne s'arrête pas

   ☐ Le plus petit entier n tel que $0.81^n \leqslant 0.5$ | ☐ `0.43046721`

2. a) La suite (u_n) définie par $u_n = 1.1^n$ est

   ☐ décroissante et converge vers 0 | ☐ croissante et diverge vers $+\infty$

   b)
```
n=1
while 1.1**n < 2 :
    n = n+1
print(n)
```

   Le script ci-dessus affiche

   ☐ Le plus grand entier n tel que $1.1^n \geqslant 2$

   ☐ Le plus petit entier n tel que $1.1^n \geqslant 2$

   ☐ Rien car il ne s'arrête pas

   ☐ 7

3. a) La suite (u_n) définie par $u_n = 1.12^n$ est

   ☐ décroissante et converge vers 0 | ☐ croissante et diverge vers $+\infty$

   b)
```
n=1
while 1.12**n < 2 :
    n = n+1
print(n)
```

   Le script ci-contre affiche

   ☐ 5 | ☐ 6 | ☐ 7

4. a) La suite (u_n) définie par $u_n = 0.88^n$ est

   ☐ décroissante et converge vers 0 | ☐ croissante et diverge vers $+\infty$

   b)
```
n=1
while 0.88**n > 0.5 :
    n = n+1
print(n)
```

   Le script ci-dessus affiche

   ☐ 4 | ☐ 5 | ☐ 6

5.5.1 Exercices : justifier un sens de variation

Exemple 5.12 — calculs préliminaires.

1. (u_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = n^2 - 3n$, simplifier :
   a) $u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 = n^2 - n + 1$
   b) $u_n + 1 = n^2 - 3n + 1$
   c) $u_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1) = n^2 - 2n + 1 - 3n + 3 = n^2 - 5n + 4$
   d) $u_{2n} = (2n)^2 - 3(2n) = 4n^2 - 6n$
2. (v_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $v_n = (-0.3)^n + 5$, simplifier :
   a) $v_{n+1} = (-0.3)^{n+1} + 5 = -0.3(-0.3)^n + 5$
   b) $v_{n+2} = (-0.3)^{n+2} + 5 = (-0.3)^2(-0.3)^n + 5 = 0.09(-0.3)^n + 5$
   c) $v_{2n+1} = (-0.3)^{2n+1} + 5 = (-0.3)(-0.3)^{2n} + 5 = (-0.3)\left(\left((-0.3)^2\right)^n\right) + 5 = -0.3 \times 0.09^n + 5$

Exercice 5.14 Voir le corrigé

Pour chacune des suites données par son terme générale exprimer les termes demandées en fonction de n. Simplifier les expressions.

1. (u_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = 2n - 1$:
   a) u_{n+1} | b) u_{n-1} | c) u_{2n}
2. (v_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $v_n = n^2 - n$:
   a) v_{2n} | b) v_{n+1} | c) v_{2n+1}
3. (w_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $w_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$:
   a) w_{n+1} | b) w_{n-1} | c) w_{2n}
4. (t_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $t_n = 2^n - 5n$:
   a) t_{n-1} | b) t_{n+1} | c) t_{2n}
5. (s_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $s_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$:
   a) s_{2n} | b) s_{4n} | c) s_{2n+1}

Exercice 5.15 Voir le corrigé

À l'aide de la relation de récurrence vérifiée par (u_n), exprimer u_{n+2} en fonction de n et de u_n.

1. $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = 5u_n$
2. $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = 5u_n + 3$
3. $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = nu_n$
4. $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = u_n + n + 1$

■ **Exemple 5.13 — Méthode n° 1 : variation d'une suite à partir du signe de $u_{n+1}-u_n$.**

Justifier le sens de variation de la suite (u_n) dans chaque cas :

1. (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = 5(0.95)^n - 7$.
2. (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{n+3}{2n-15}$.

solution.

1. $$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left(5(0.95)^{n+1}-7\right)-\left(5(0.95)^{n+1}-7\right) \\ &= 5(0.95)^{n+1}-5(0.95)^n \quad \textit{factoriser} \\ &= 5(0.95)^n(0.95-1) \\ &= -0.05\times 5(0.95)^n \end{aligned}$$

   $u_{n+1}-u_n < 0$

   $\therefore$ La suite est décroissante.

2. $$u_{n+1} = \frac{(n+1)+3}{2(n+1)-15} = \frac{n+4}{2n-13}$$

   $$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{n+4}{2n-13}-\frac{n+3}{2n-15} \\ &= \frac{(n+4)}{(2n-13)}\frac{(2n-15)}{(2n-15)}-\frac{(n+3)}{(2n-15)}\frac{(2n-13)}{(2n-13)} \\ &= \frac{(2n^2-7n-60)-(2n^2-7n-39)}{(2n-13)(2n-15)} \\ &= \frac{33}{(2n-13)(2n-15)} \end{aligned}$$

   $2n-13 \geqslant 0$ *pour* $n \geqslant \dfrac{13}{2}$

   $2n-15 \geqslant 0$ *pour* $n \geqslant \dfrac{15}{2}$

   $u_{n+1}-u_n \geqslant 0 \qquad$ pour $n \geqslant 8$

$\therefore$ La suite est croissante à partir de $n=8$. ■

Exercice 5.16 Voir le corrigé

Etudier pour $n \geqslant 0$ le signe de $u_{n+1}-u_n$ et en déduire le sens de variations des suites (u_n) définies par :

1. a) $u_n = n-2n^2$	b) $u_n = n^2-10n+10$	c) $u_{n+1} = u_n+2n-7$
2. a) $u_n = \dfrac{4}{n+1}$	b) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$	c) $u_n = \dfrac{1}{3n+1}$
3. a) $u_n = 2-0.75^n$	b) $u_n = 2(1.15^n+5)$	c) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

Exercice 5.17 Voir le corrigé

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{1.05^n}{n+1}$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$: $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1.05^n(0.05n-0.95)}{(n+1)(n+2)}$
2. Déterminer le rang n à partir duquel (u_n) est croissante.

Exercice 5.18 Voir le corrigé

Dans chaque cas, justifier le sens de variation de la suite (u_n).

1. (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.
2. (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.
3. (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 1$ par $u_{n+1} = 6u_n - u_n^2 - 10$.

5.5.2 Exercices : modéliser à l'aide de suites

Exemple 5.14 — comme au bac.

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres. Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres. Le verger compte 400 arbres en 2023.

On désigne par $u_n =$ nomvre d'arbre dans le verger en l'année $2023 + n$.

Préciser le terme initial et la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

solution.

D'après l'énoncé $u_0 = 400$.

$u_{n+1} =$ nbr d'arbre en l'année « $2023 + n + 1$ » ■

$=$ (nbr d'arbre en l'année « $2023 + n$ ») diminué des 10% vendus $+ 60$

$u_{n+1} = 0.90 \times u_n + 60$

Exercice 5.19 Voir le corrigé

Une ville compte 35 000 habitant en 2023. On prévoit que la population croit de 2% par an. On note P_n la population à l'année $2023 + n$.

1. Justifier $P_0 =$35 000 et que pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = 1{,}02P_n$
2. Utiliser la calculatrice pour déterminer la population prévue à l'année 2034.

Exercice 5.20 Voir le corrigé

Un élevage compte 5 000 poisson. La population s'accroit de 8% par mois, et à la fin d'un mois on prelève 300 poissons. On note P_n la population de poissons après n mois.

1. Justifier $P_0 =$5 000 et que pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = 1{,}08P_n - 300$
2. Utiliser la calculatrice pour déterminer la population de poissons après 1 an.

Exercice 5.21 Voir le corrigé

Angélique emprunte 10000 €, et rembourse par mensualités de 200 €. Chaque mois, 0,5% d'intêrets s'ajoute au restant emprunté. Soit S_n la somme à rembourser au mois n.

1. Justifier S_0 =10000 € et que pour tout $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = 1{,}005A_n - 200$
2. Utiliser la calculatrice pour déterminer le montant dû après 6 mois.

Exercice 5.22 — vu au Bac. Voir le corrigé

On étudie le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps. Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium. On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques. On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium. On modélise la situation à l'aide d'une suite (v_n); on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n > 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$
2. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5{\times}10^{19}$

Exercice 5.23 — un couple de suites. Voir le corrigé

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B. En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023. L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;

— chaque année, 15% des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;

— chaque année, 10% des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300$.

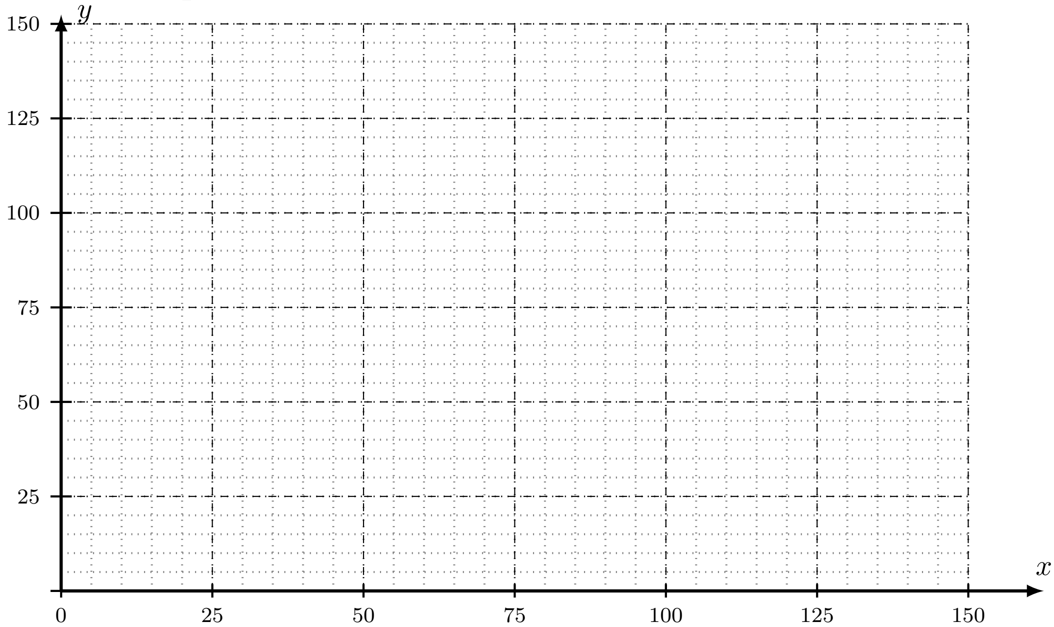
Exercice 5.24

Voir le corrigé

À compter du jour 0, un patient prend 50 mg d'un ingrédient actif chaque matin. On sait que le corps élimine 40% de cet ingrédient chaque 24 h.

On note A_n la quantité en mg d'ingrédient actif présent dans le corps au jour n immédiatement après la prise de médicament.

1. Donner A_0 et justifier que pour tout $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = 0{,}6A_n + 50$.
2. Tracer ci-dessous la droite représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}6x + 50$, ainsi que la droite d'équation réduite $y = x$.



   Construire (sans les calculer) les termes successifs de A_0 à A_3 sur l'axe des abscisses.
3. Conjecturer le sens de variation et la valeur de la limite de la suite (A_n).
4. Quelle est la quantité d'ingrédient actif accumulée dans le corps après une utilisation prolongée ?

Exercice 5.25 — Les mathématiques au secours des sciences de la vie.

Voir le corrigé

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce de mammifères (endémiques) sur une île. En 2025, on suppose qu'il y a 1000 individus de cette espèce.

1. **Premier modèle :** Le biologiste suppose que la population augmente de 4% chaque année. On note par u_n le nombre de mammifères pour l'année $2025 + n$.
   a) Donner u_0 et calculer u_1.
   b) Justifier que $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 1.04u_n$
   c) Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite (u_n).
   d) Que penser de ce modèle ?

2. **Second modèle :** On modélise la population par une suite (v_n) définie par $v_0 = 1000$ et $\forall n \geqslant 0,\ v_{n+1} = f(v_n)$ où la fonction où f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1.1x\left(1 - \dfrac{x}{50000}\right)$.
   a) Conjecturer le sens de variation et la valeur de la limite de la suite (v_n).
   b) On admet que la limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$. Déterminer la valeur de ℓ.
   c) On souhaite à l'aide d'un script Python, savoir quand la population va selon ce modèle dépasser les 4000 individus. Compléter le script ci-contre afin de répondre à cette question.

```python
v = ...
p = ...
while  ...
    u =  ...
    p =  ...
print(   )
```

   d) Déterminer par la méthode de votre choix l'année ou la population dépassera 4000 individus.

La fontion *logistique* définie sur $[0;1]$ par $f(x) = kx(1-x)$ modélise deux contraintes :

— le facteur kx pour l'accroissement naturel de cette population.

— le facteur $1-x$ qui indique que si la population est trop nombreuse (proche du max), les ressources naturelles lui manquent, et elle a tendance à diminuer.

Une suite logistique (u_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$. La suite logistique peut avoir un comportement chaotique pour certaines valeurs de k.[a]

[a] https://www.desmos.com/calculator/hm6ibbg1vz et https://www.desmos.com/calculator/errxlqv3ff

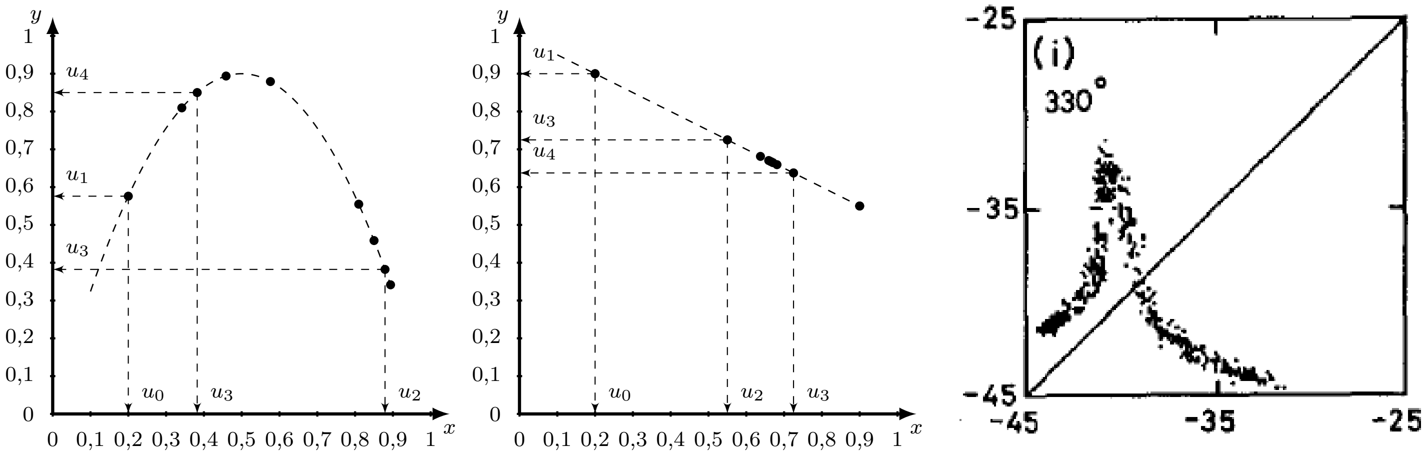


Figure 5.5 – Les représentations de Poincaré permettent la visualisation de la relation entre deux termes consécutifs d'une suite, et révèlent la stabilité d'un système, ou son caractère chaotique.
(à gauche) Représentation de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0{,}2$ et $u_{n+1} = 3{,}6u_n(1-u_n)$
(centre) Représentation de la suite (v_n) définie par : $u_0 = 0{,}2$ et $v_{n+1} = 1 - 0{,}5u_n$
(à droite) Représentation du diagramme de Poincaré $(V_n\ ;\ V_{n+1})$ d'une suite de (V_n) des mesures de tensions d'un neuronne (de mollusque) soumis à une excitation régulière (Hayashi 1982)