Chapitre 9

Dérivation (3) compléments et approfondissements

Table 9.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 9…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
Application : signe de la dérivée et sens de variation			
fonctions monotones			
sens de variation de fonctions polynomiales, nature des valeurs critiques			
cas de fonctions cubiques			
problèmes inverse : retrouver l'expression d'une fonction connaissant des valeurs et nombres dérivées.			
fonctions rationnelles et avec radicaux			
Problèmes			
problèmes d'optimisation,			

9.1 Étude des variations d'une fonction

R Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.

Si f est une (strictement) croissante alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$

Si f est une (strictement) décroissante alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) \leqslant 0$.

Si f est constante sur $[a;b]$, alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) = 0$.

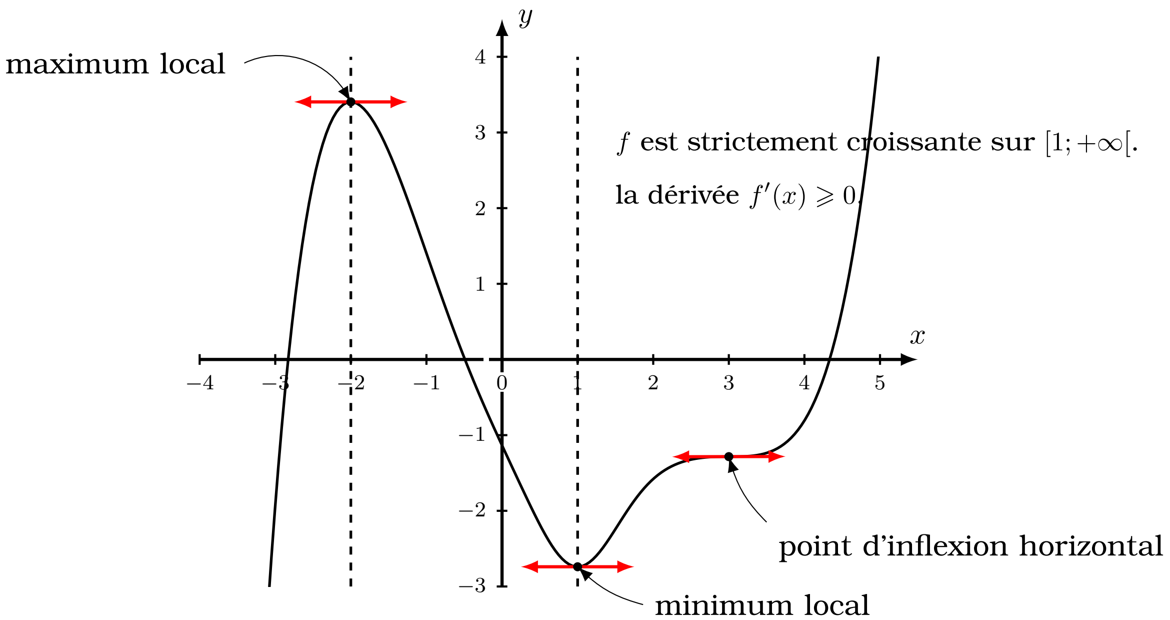
Définition 9.1 Soit $\mathscr{C} : y = f(x)$ la représentation de la fonction f.

On appelle *point critique* tout point $P(x;y) \in \mathscr{C}_f$ tel que :

$$f'(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f' \text{ n'est pas définie}$$

Si $f'(x) = 0$ et *la dérivée change de signe*, x est un *extremum* local.

Si $f'(x) = 0$ et *la dérivée ne change pas de signe*, on parle d'un point d'inflexion horizontal.



x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
variation de f		↗	$f(-2)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↗	

Théorème 9.1 — admis.

Pour une fonction f définie sur intervalle $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a;b]$
- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$
- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$

9.2 Exercices

■ **Exemple 9.1 — étude de variation d'une fonction.**

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

solution.

(justifier la dérivabilité) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

(justifier le signe de la dérivée) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

■ **Exemple 9.2 — étude de variation d'une fonction.**

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

solution.

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ car quotient de fonctions dérivables et dénominateur non nul.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^2} < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 9.1 Voir la solution

Montrer que les fonctions suivantes sont strictement monotones sur l'intervalle I donné :

1. a) $f(x) = -3x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$
   b) $f(x) = x^3 + 4x - 7$ sur $I = \mathbb{R}$
   c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$
   d) $f(x) = -x^5 - 5x^3 - 10x$ sur $I = \mathbb{R}$
   e) $f(x) = -2x + x^2 - x^3$ sur $I = \mathbb{R}$
   f) $f(x) = x^3 + mx^2 - 5x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$
2. a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$
   b) $f(x) = x^5 + \sqrt{2x-6}$ sur $I =]3; +\infty[$
3. a) $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$ sur $I =]-\infty; 0[$
   b) $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x^4}$ sur $I =]-\infty; 0[$
   c) $f(x) = x - \dfrac{1}{2x-1}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$
   d) $f(x) = \dfrac{3}{(5x-1)^2}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{5}; +\infty\right[$
4. a) $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+2}$ sur $I =]-2; +\infty[$
   b) $f(x) = \dfrac{3-x}{1+4x}$ sur $I = \left]-\infty; -\dfrac{1}{4}\right[$

Exercice 9.2 Voir la solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

1. Préciser le domaine D de f sous la forme d'union d'intervalles.
2. Justifier que f est dérivable sur D.
3. Déterminer l'expression de la dérivée $f'(x)$.
4. Justifier sur chaque intervalle de D le sens de variation de la fonction dérivée f'.

■ **Exemple 9.3**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2$.

Étudier le sens de variation de f et préciser la nature des valeurs critiques.

solution. numworks

1. *(justifier la dérivabilité)* f est dérivable sur $D' = \mathbb{R}$ car somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. *(calculer la dérivée et factorisation)* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2)$
3. *(valeurs critiques de f et étudier du signe de la dérivée)*

   Les valeurs critiques sont solutions de

   $$f'(x) = 0$$

   $$12x^2(x-2) = 0$$

   $$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

   f est strictement croissante sur $[0; 2]$

   f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$12x^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x - 2)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\searrow$	$\dots$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	

4. *points critiques de $\mathscr{C}_f$* :

   $f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 2 = 2$, $A(0\ ;\ 2)$ point d'inflexion horizontal de $\mathscr{C}_f$.

   $f(2) = 3(2)^4 - 8(2)^3 + 2 = -14$. $B(2\ ;\ 9)$ point critique de $\mathscr{C}_f$, f a un minimum local en $x = 2$.

On notera que 9 est le minimum global de la fonction f sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 9.3 Voir la solution

Étudier le sens de variations des fonctions suivantes et la nature des valeurs critiques.

1. a) $f(x) = 2x^2 + 3x$ | b) $f(x) = -x^2 + 4x + 8$
2. a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ | b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$
3. a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ | b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 9$
4. a) $f(x) = (x-2)(x+3)^3$ | b) $f(x) = (x+2)^3(2x-3)^2$

Exercice 9.4 Voir la solution

Nous rappelons que pour $a > 0$, la fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right[$.
Justifier l'affirmation en utilisant la fonction dérivée. Qu'en est-il lorsque $a < 0$?

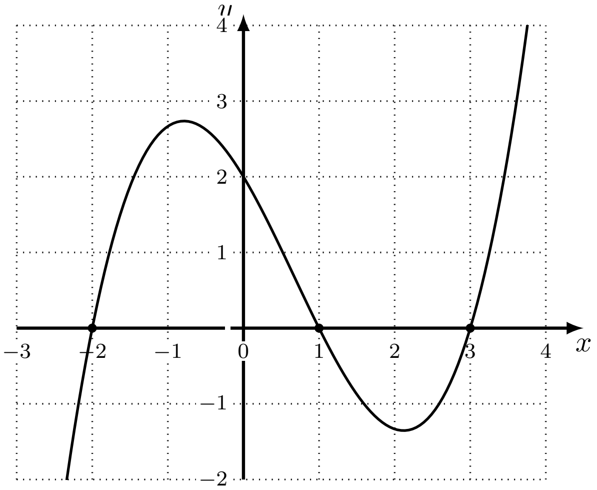
Exercice 9.5 Voir la solution

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 24x + 1$ admet un extremum local en $x = -4$.

Déterminer la valeur de a et justifier qu'il s'agit d'un maximum local.

Exercice 9.6 — **Une courbe, trois tableaux.**

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de la fonction dérivée $\mathscr{C}_{f'}$ est donnée ci-dessous. Quel est le tableau de variation de la fonction f ?



x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
variation de f_2	↗	↘	↗	

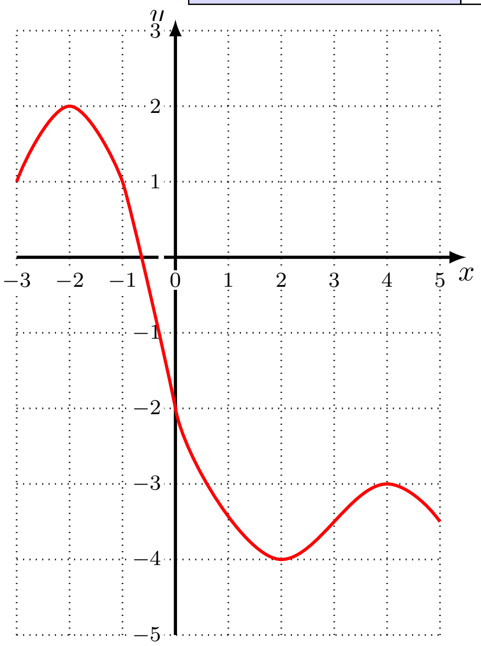
x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
variation de f_2	↗	↘	↗	↘	

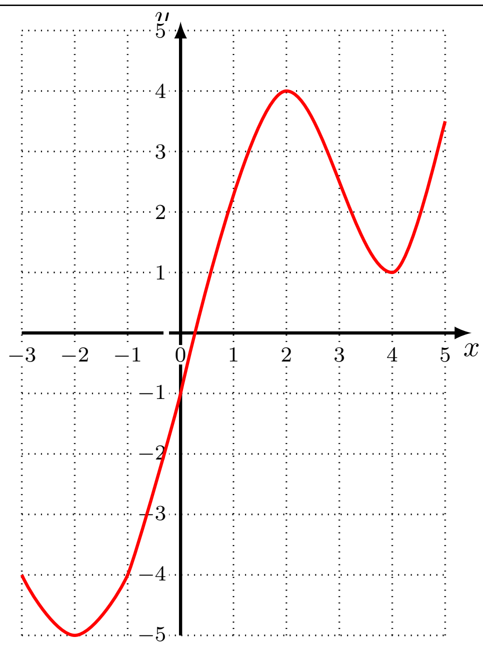
x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
variation de f_2	↘	↗	↘	↗	

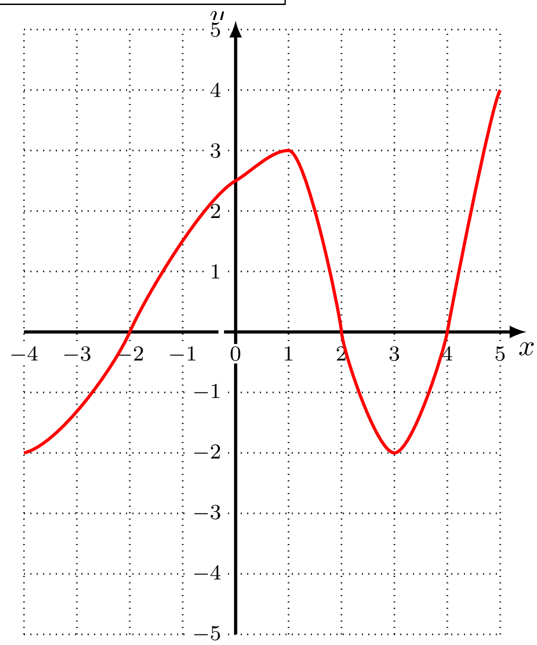
Exercice 9.7 — **Un tableau et trois courbes.**

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de sa dérivée f'. Quel est la représentation de la fonction f ?

x	$-\infty$	-2	1	2	3	4	$+\infty$
variation de f'	$-\infty$ ↗	0 ↗	3 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	$+\infty$





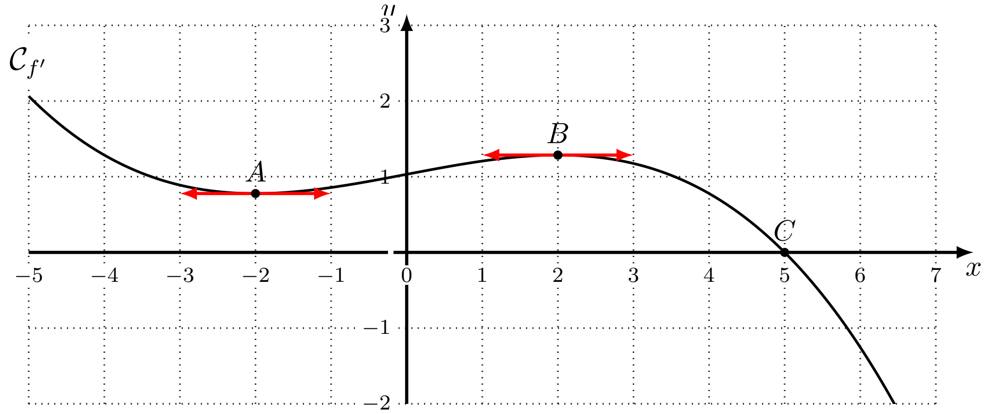


Exercice 9.8

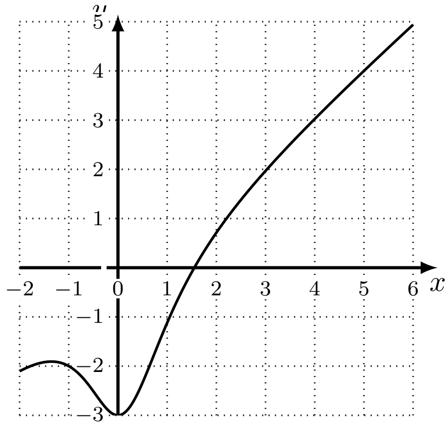
Un chef d'État annonce que la dette publique augmente, mais de moins en moins vite. Interpréter cette annonce en terme de fonction, et de sa dérivée.

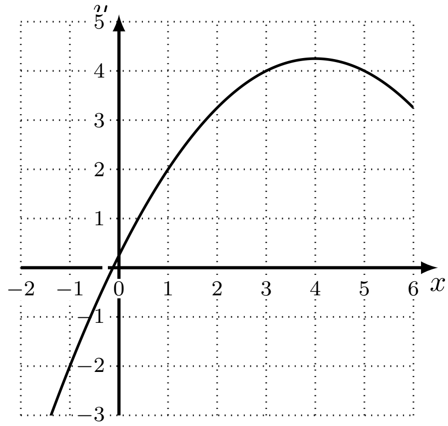
Exercice 9.9

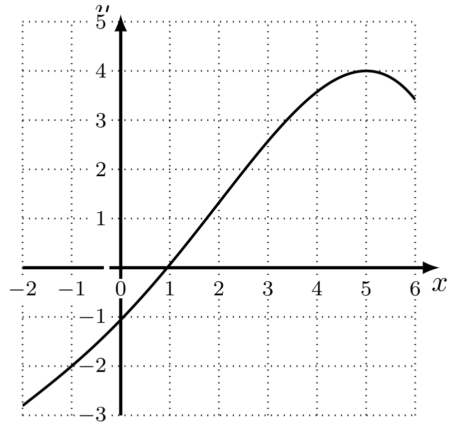
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si dessous est la représentation $\mathcal{C}_{f'}$ de la dérivée f'.



Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive f. Déterminer la courbe associée à la fonction f.

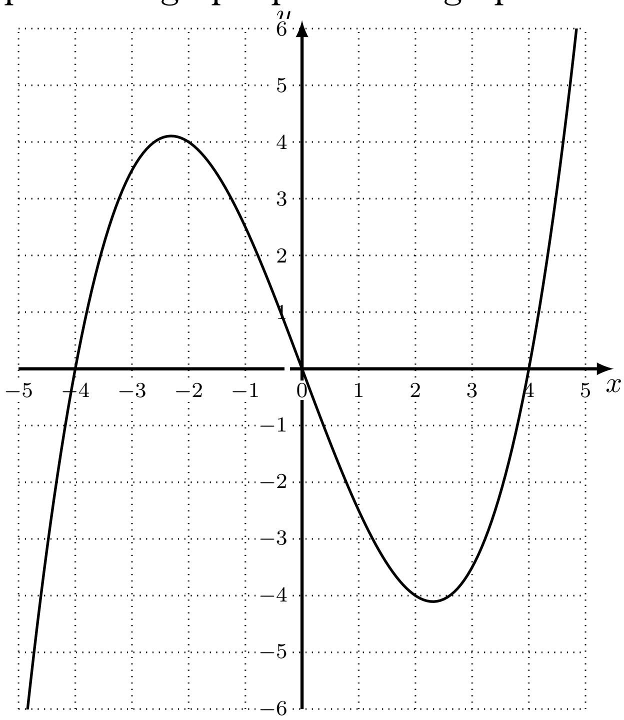


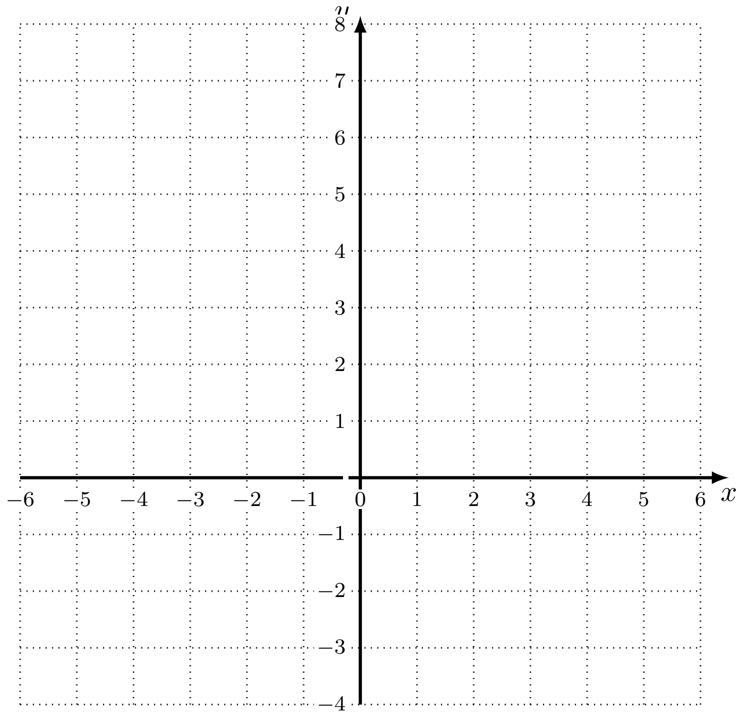




Exercice 9.10

En déterminant graphiquement la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ en différents points, représenter graphiquement le graphe de sa dérivée f'.





9.2.1 Exercices : applications aux fonctions polynomiales

■ Exemple 9.4 — étude d'une fonction (cubique).

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On note f' la fonction dérivée. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variation de f et préciserez la nature des valeurs critiques.
4. Donner un encadrement de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ lorsque $-2 \leqslant x \leqslant 5$.
5. Déterminer a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
6. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
7. Sans calculs supplémentaires, dresser le tableau de signe de f.
8. Esquisser une représentation graphique de la fonction f en précisant les points critiques et les intersections avec les axes du repère.

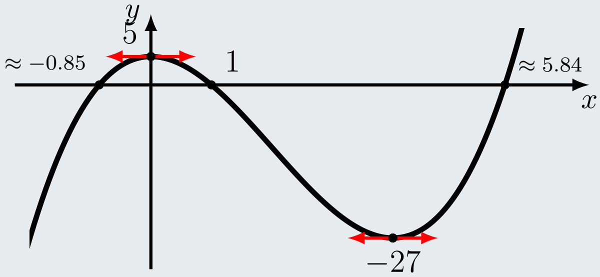
solution.

1. f est un *polynôme*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$
3. Valeurs critiques en $x = 0$ et $x = 4$.
   f admet un maximum local en 0,
   et un minimum local en $x = 4$.

x	$-\infty$	-2		0		4		5	$+\infty$
signe de $f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$		
variation de f		-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-20	

4. $f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 5 = -27$ et
   $f(5) = (5)^3 - 6(5)^2 + 5 = -20$.
   $\therefore$ si $-2 \leqslant x \leqslant 5$ alors $-27 \leqslant x^3 - 6x^2 + 5 \leqslant 5$.
5. Par *Horner* ou par *identification des coefficients* $f(x) = (x-1)(x^2 - 5x - 5)$.
6. $f(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{45}}{2}$.
7.

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{45}}{2}$		1		$\frac{5+\sqrt{45}}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

8. 

■

Exercice 9.11 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de sa dérivée $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciserez la nature des valeurs critiques.
3. Donner un encadrement de $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 3$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-2)^2(x+1)$ et en déduire le tableau de signe de f.
5. Esquisser une représentation graphique de la fonction f en précisant les points critiques et les intersections avec les axes du repère.

Exercice 9.12 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 4x$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de sa dérivée $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciserez la nature des valeurs critiques.
3. Donner un encadrement de $f(x) = x^3 + x^2 - 4x$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
4. Déterminer une forme factorisée de f et dresser le tableau de signe de f.
5. Esquisser une représentation graphique de la fonction f en précisant les points critiques et les intersections avec les axes du repère.

Exercice 9.13 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x + 4$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de sa dérivée $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciserez la nature des valeurs critiques.
3. Donner un encadrement de $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
4. Vérifier que $f(2) = 0$. Sans calculs supplémentaires, dresser le tableau de signe de f.
5. Esquisser une représentation graphique de la fonction f en précisant les points critiques et les intersections avec les axes du repère.

Exercice 9.14 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de sa dérivée $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. a) Vérifier que $f(-3) = 4$.
   b) Déterminer a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - 4 = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 4$.

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = 15$.
   b) Sans calculs supplémentaires, donner l'ensemble de solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 15$.

■ **Exemple 9.5 — retrouver une expression à partir d'informations sur le nombre dérivé.**

Soit $\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\ ;\ 7)$ est de pente 3, déterminer a et b.

solution. $f(x) = 2x^2 - ax + b$, $f'(x) = 4x - a$.

$$A(2\ ;\ 7) \in \mathscr{C}_f \iff f(2) = 7 \iff 2(2)^2 - a(2) + b = 7.$$

pente de la tangente en $A(2\ ;\ 7)$ est $3 \iff f'(2) = 3 \iff 4(2) - a = 3$

En résolvant le système $\begin{cases} 8 - 2a + b = 7 \\ 8 - a = 3 \end{cases}$ on a $\begin{cases} a = 5 \\ b = 9 \end{cases}$, $\therefore f(x) = 2x^2 - 5x + 9$. ■

Exercice 9.15 Voir la solution

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f donnée par $f(x) = x^3 + ax + 5$.

Déterminer a sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'asbcisse 1 est de pente 10.

Exercice 9.16 Voir la solution

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f donnée par $f(x) = -3x^3 + ax + b$.

Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'asbcisse $A(-3\ ;\ 8)$ est de pente 9.

Exercice 9.17 Voir la solution

Soit $\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax + b$.

1. Déterminer a et b sachant que $A(-2\ ;\ 3)$ est un point critique de $\mathscr{C}_f$.
2. En déduire les coordonnées de l'autre point critique de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9.18 Voir la solution

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est d'équation réduite $y = 3x + 1$, et que $A(2\ ;\ -13) \in \mathscr{C}_f$.

1. Justifier que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$. En déduire les valeurs de b et c.
2. Justifier que a vérifie $4a + 7 = -13$ et déterminer l'expression de la fonction f.

Exercice 9.19 Voir la solution

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On suppose que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points $A(0\ ;\ 1{,}2)$ et $B(2\ ;\ 0)$ sont horizontales.

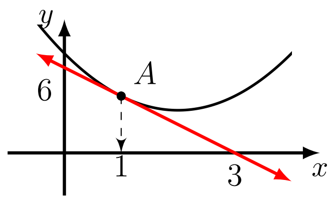
1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
2. Donner $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire les valeurs de c et d.

3. Donner $f(2)$ et $f'(2)$ et en déduire que a et b vérifient $8a + 4b + 1{,}2 = 0$ et $12a + 4b = 0$.
4. Déterminer a et b et retrouver l'expression de f.

Exercice 9.20

Voir la solution

Sur la figure sont représentées la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + ax + b$ et la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ au point A.

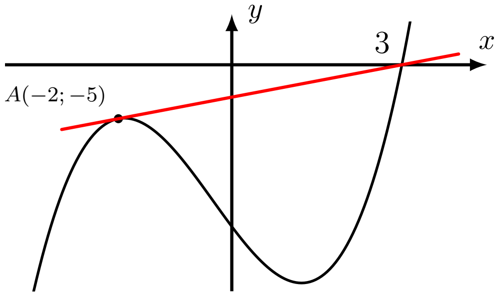


1. Déterminer l'équation réduite de T_1 et les coordonnées de A.
2. Déterminer a et b et en déduire le minimum de f.

Exercice 9.21

Voir la solution

Sur la figure sont représentées la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(-2\ ;\ -5)$.

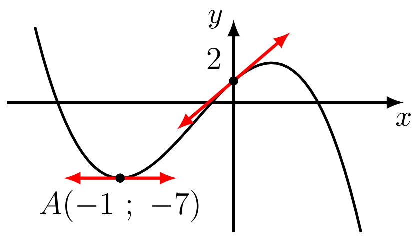


1. Déterminer la pente de la tangente en A.
2. Écrire un systèmes d'équations vérifiées par a et b.
3. Déterminer a et b et en déduire l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9.22

Voir la solution

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

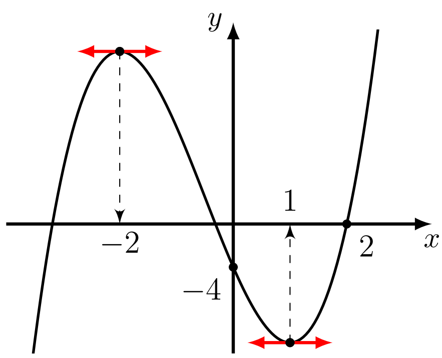


1. Déterminer c et d sachant que la droite $T : y = 9x+2$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $B(0\ ;\ 2)$.
2. Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(-1\ ;\ -7)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 9.23

Voir la solution

Sur la figure est représentée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On suppose que les tangentes aux points d'abscisses 1 et -2 sont horizontales, que 2 est un zéro de la fontion, et que -4 est l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{C}_f$.



1. Justifier que $d = -4$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a(x^2 + x - 2)$.
3. En déduire b et c en fonction de a.
4. Montrer a vérifie, $\dfrac{2}{3}a - 4 = 0$, et donner l'expression de $f(x)$.

■ **Exemple 9.6**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - \dfrac{1}{x}$.

Étudier le sens de variation de f et préciser la nature des valeurs critiques.

solution.

1. *(justifier la dérivabilité)* f est dérivable sur $D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. *(calculer la dérivée et factoriser)* pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x + 3 - \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{4x^3 + 3x^2 + 1}{x^2} \\ &= \frac{(x+1)(\dots x^2 + \dots x + \dots)}{x^2} \end{aligned}$$

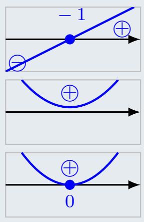
mise au même dénominateur

cubique factorisable par $(x-1)$ car racine évidente $x = -1$

3. *(valeurs critiques de f)*

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{(x+1)(\dots x^2 + \dots x + \dots)}{x^2} = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$$
$$x = -1$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dots x^2 + \dots x + \dots$		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
variation de f		$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	



f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$

f est strictement croissante sur $[-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

4. *points critiques de $\mathscr{C}_f$*

$f(-1) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $A(0\ ;\ \dots)$ point critique de $\mathscr{C}_f$, f a un minimum local en $x = -1$.

■

■ **Exemple 9.7**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{-x^3}{(x-1)^2}$.

Étudier le sens de variation de f et préciser la nature des valeurs critiques.

solution.

1. *(justifier la dérivabilité)* f est dérivable sur $D'=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ car quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2. *(calculer la dérivée et factoriser)* pour tout $x\in\mathbb{R}$:

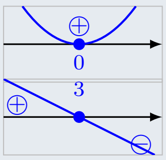
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-3x^2)(x-1)^2-(-x^3)\times 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{\cancel{(x-1)}\left[-3x^2(x-1)+2x^3\right]}{(x-1)^{\cancel{4}}} \\ &= \frac{\left[-x^3+3x^2\right]}{(x-1)^3} = \frac{x^2(-x+3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

factoriser

3. *(valeurs critiques de f)*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{x^2(-x+3)}{(x-1)^3} &= 0 \\ x^2 = 0 \quad &\text{ou} \quad -x+3=0 \\ x=0 \quad &\text{ou} \quad x=3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2			0						
$-x\ +\ 3$							0		
$(x\ -\ 1)^3$					0				
signe de $f'(x)$			0		$\Vert$		0		
variation de f		↘	0	↘	$\Vert$	↗	-6.75	↘	



f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $[3;+\infty[$

f est strictement croissante sur $]0;1]$

4. *points critiques de $\mathscr{C}_f$*

$f(0)=$........................, $A(0\ ;\ \ldots)$ point critique de $\mathscr{C}_f$, point d'inflexion horizontal,

$f(3)=$...................., $B(0\ ;\ \ldots)$ point critique de $\mathscr{C}_f$, f a un maximum local en $x=3$.

■

Exercice 9.24

Voir la solution

Étudier le sens de variations des fonctions suivantes et la nature des valeurs critiques.

Vous préciserez le domaine de définition et de dérivabilité et déterminerez l'expression de f' sous forme factorisée.

1. a) $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$ | b) $f(x) = -x - \dfrac{9}{x}$
2. a) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ | b) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$
3. a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$ | b) $f(x) = \dfrac{-4}{x^2 + 1}$
4. a) $f(x) = \dfrac{(3x^2 - 5x - 1)}{(3x - 12)}$ | b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 8x - 13}{x^2 - 4x + 5}$
5. a) $f(x) = x - \sqrt{x}$ | b) $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$
6. a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$ | b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$
7. a) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$ | b) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(2 - x)^2}$

Exercice 9.25

Soit la courbe $\mathscr{C} : y = 2x^2 + a + \dfrac{b}{x}$. Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'asbcisse $A(1\ ;\ 11)$ est de pente -2.

Exercice 9.26

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\sqrt{1 - bx}$ représentée par $\mathscr{C}_f$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est d'équation réduite $y = -3x + 5$.

1. Justifier que $f(-1) = 8$ et $f'(-1) = -3$ et en déduire que a et b vérifient $a = \dfrac{8}{\sqrt{1+b}}$ et $\dfrac{4b}{1+b} = 3$
2. Déterminer a et b.

Exercice 9.27

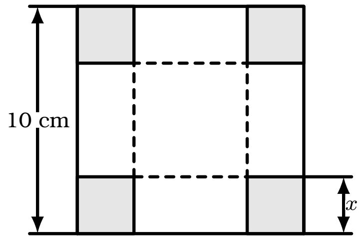
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + bx + c$. On suppose que $A(0; 5)$ et $B(2, -\frac{23}{3}) \in \mathscr{C}_f$, et que la pente de la tangente en A est -9.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
2. Pour chaque question entourer l'équation vraie :
   a) (A) $f(5) = 0$ (B) $f'(5) = 0$ (C) $f(0) = 5$ (D) $f'(0) = 5$
   b) (A) $f'(-9) = 0$ (B) $f'(5) = -9$ (C) $f'(0) = -9$ (D) $f'(-9) = 5$
   c) (A) $f(2) = -\frac{23}{3}$ (B) $f'(2) = -\frac{23}{3}$ (C) $f(-\frac{23}{3}) = 5$ (D) $f'(-\frac{23}{3}) = 2$
3. En déduire un systèmes de 3 équations vérifiées par a, b et c.
4. Résoudre le système et déduire l'expression de la fonction f.

9.2.2 Exercices : problèmes et approfondissements

Exercice 9.28 — **un classique d'optimisation.**

On dispose d'un carton carré de longueur de côté 10 cm. Pour fabriquer une boite sans couvercle on enlève 4 coins carrés identiques de côté x et on relève les bords par pliage.



1. Exprime à l'aide de x les dimensions de la boite.
2. Montrer que le volume de la boite $f(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$.
3. Expliquer pourquoi $x \in [0; 5]$.
4. Déterminer f' et étudier le sens de variation de f sur $[0; 5]$.
5. Déterminer x pour laquelle le volume est maximal et que le maximum vaut $\frac{2000}{7}$.

Exercice 9.29 — **d'après Bac Pro maintenance auto, Nouvelle Calédonie juin 2003.**

La consommation d'essence C mesurée en L/100km d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de sa vitesse v (donnée en km/h) sous la forme

$$C(v) = av + \frac{b}{v}$$

1. Pour déterminer les valeurs des coefficients a et b, on effectue deux essais qui donnent les résultats suivants :

v en km/h	100	80
C en L/100km	7,5	6,675

   a) Montrer que a et b vérifient :

$$\begin{cases} 10\ 000a + b = 750 \\ 6\ 400a + b = 534 \end{cases}$$

   b) Résoudre ce système par la méthode de votre choix, et déterminer a et b.

2. Dans la suite de l'exercice on admet que la consommation d'essence C est donnée par la fonction définie sur $[20; 130]$ par $C(v) = 0{,}06v + \dfrac{150}{v}$

   a) Déterminer l'expression de f' et en déduire les variations de la fonction f.

   b) À quelle vitesse faut rouler pour que la consommation soit minimale. Quelle est alors la consommation ?

   c) On cherche les valeurs de la vitesse v pour lesquelles la consommation sera inférieure ou égale à 7 L/100km.

      i. Déterminer algébrique les solutions de $C(v) = 7$. Arrondir à 10^{-2} près.

      ii. En déduire l'intervalle de vitesse cherché.