Chapitre 10

La fonction exponentielle

Table 10.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 10…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
approche intuitive des fonctions exponentielles			
calcul d'images et recherche graphique d'antécédent	10.1 10.2		
résolution d'équations exponentielles simples	10.3 10.4	10.5 10.6 10.7	
La fonction exponentielle			
définition comme solution unique de $y' = y$ et $y(0) = 1$ et propriétés élémentaires (positivité, croissance)	10.13	10.37	
dérivation de la fonction exponentielle et de produit et quotient avec d'autres fonctions de référence.	10.8	10.10	10.11
déterminer l'équation d'une tangente	10.9	10.12	
étude des variations de fonctions obtenues par somme, produit, quotient et composition affine de fonction de référence et de la fonction exponentielle	10.14	10.16 à 10.21	10.38 à 10.41
problèmes inverses		10.22 à 10.24	
propriétés algébriques de la fonction exponentielle		10.25 à 10.29	
résolution d'équations et d'inéquations exponentielles		10.30 à 10.32, 10.36	
initiation aux logarithmes (pour les enseignements de spécialités)			10.33 à 10.35

10.1 Fonctions exponentielles

Définition 10.1 Soit un réel strictement positif $a > 0$, $a \neq 1$.

Une fonction exponentielle de base a est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$.

R Le cas $a = 1$ est exclu car la fonction f définie par $f(x) = 1^x = 1$ est une fonction constante (et non exponentielle).

■ **Exemple 10.1**

Pour un réel a non nul, on connait la signification de a^x pour les valeurs entières de x :

$$4^3 = 64 \qquad 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8} \qquad -5^2 = -25$$

et pour certaines valeurs rationnelles de x

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 3 \qquad 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$4^{\frac{5}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 2^5 = 32 \qquad 4^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^5 = (\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4})\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}$$

Plus généralement, pour p et q entiers non nuls on peut définir : $a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

Il n'est pas trivial de donner un sens à l'écriture a^x pour $x \notin \mathbb{Q}$ irrationel. Pour le moment on interprète $a^{\sqrt{2}}$ avec $\sqrt{2} \approx 1.414214$ comme la valeur limite de la suite $a^{1{,}4} = (\sqrt[10]{a})^{14}$, $a^{1{,}41} = (\sqrt[100]{a})^{141}$, $a^{1{,}414}$, $a^{1{,}414\,2}$, $a^{1{,}414\,21}$ ...

■ **Exemple 10.2** Utiliserez votre calculatrice pour évaluer :

1. Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$, $f(-3{,}1) = 2^{-3{,}1} \approx 0.3415101$
2. Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^{-x}$, $f(\pi) = 2^{-\pi} \approx 0.3366225$
3. Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}6^x$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}6^{3/2} \approx 0.6817316$

R Les fonctions exponentielles de base a sont des fonctions *transcendantes* : on ne peut pas exprimer a^x comme solution d'une équation polynomiale à partir de a et x.

Propriétés 10.1 — propriétés des écritures exponentielles. Soit un réel positif $a > 0$:

(i) $a^0 = 1$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x > 0$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, en particulier $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

(iv) Pour tout x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$: $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

(v) Pour tout x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$: $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$.

(vi) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $(a^x)^n = a^{nx}$.

Propriétés 10.2 Soit la fonction exponentielle de base $a > 0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$:

(i) $f(0) = 1$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

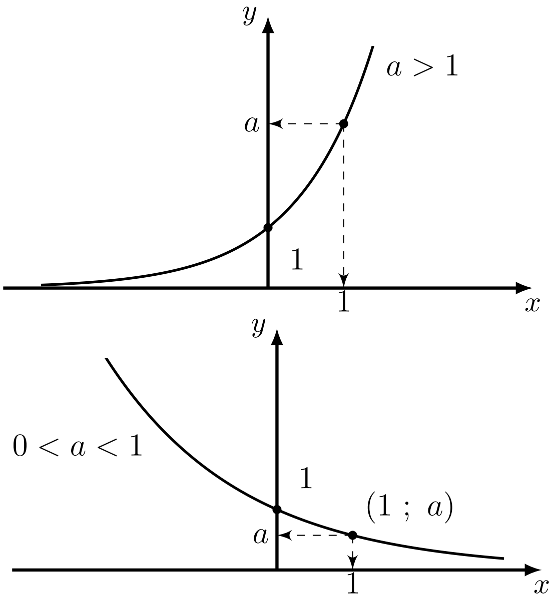
(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

(iv) Pour tout x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ on a $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$. En particulier $f(x+1) = af(x)$.

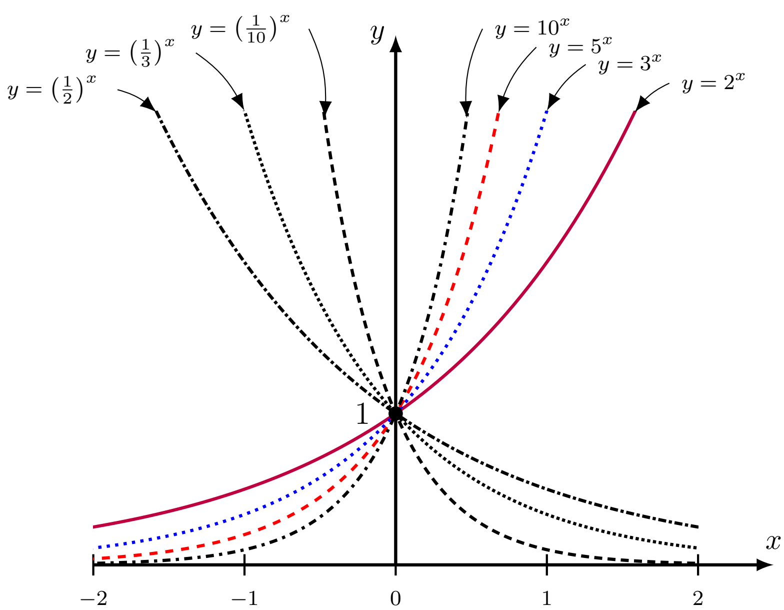
(v) Pour tout x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} = f(x_1 - x_2)$.

Figure 10.1 – Représentations de fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ pour différentes valeurs de a.

(a) Les fonctions exponentielles de base $a > 0$ sont strictement monotones.



(b) Les représentations graphiques de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriétés 10.3 — **variation, admis.** Soit un réel $a > 0$, $a \neq 1$.

La fonction exponentielle de base a définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ est strictement monotone :

1. Si $a > 1$ alors f est strictement croissante.

   Si $0 < a < 1$ alors f est strictement décroissante.

2. Tout réel $k > 0$ admet un antécédent unique par f :

$$\forall k > 0 \quad \text{il existe un unique réel } x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a^x = k$$

■ **Exemple 10.3**

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1.25^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.9^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1.5^{-x} = \frac{1}{1.5^x} = \left(\frac{1}{1.5}\right)^x$ est strictement décroissante.

Postulat 10.4 — **admis.**

La fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les propriétés 10.1 et le postulat 10.4 permettent d'affirmer que la dérivée d'une fonction exponentielle f' est *proportionnelle* à f.

Propriété 10.5 Soit $a > 0$ et $a \neq 1$.

Soit f la fonction exponentielle de base a définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = kf(x)$$

Démonstration. On calcule le taux d'accroissement :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \dfrac{(a^h - 1)a^x}{h} = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} f(x)$ ■

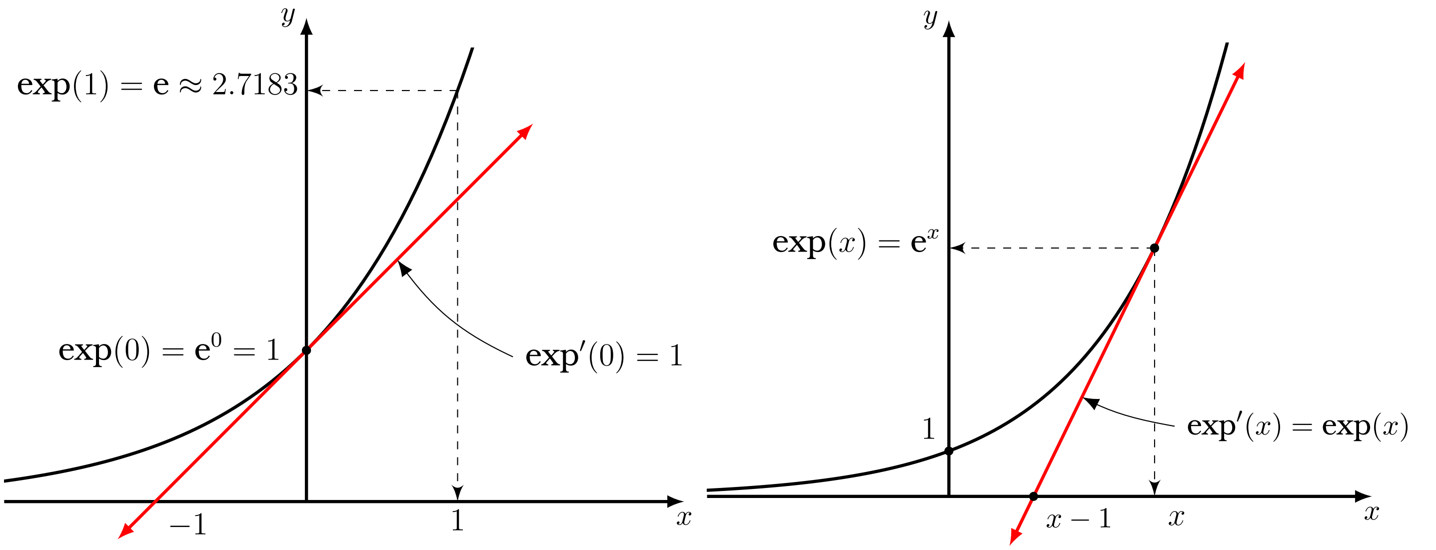
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}}_{=f'(0)}$$

$$f'(x) = f'(0) \times f(x)$$

■ **Exemple 10.4** Illustration à l'aide de Desmos :

1. Pour $f : x \mapsto 1.5^x$, la fonction dérivée vérifie $f'(x) \approx 0.41 \times 1.5^x$.
2. Pour $f : x \mapsto 2^x$, la fonction dérivée vérifie $f'(x) \approx 0.69 \times 2^x$.
3. Pour $f : x \mapsto 2.5^x$, la fonction dérivée vérifie $f'(x) \approx 0.92 \times 2.5^x$.
4. Pour $f : x \mapsto 3^x$, la fonction dérivée vérifie $f'(x) \approx 1.10 \times 3^x$.
5. Pour $f : x \mapsto 3.5^x$, la fonction dérivée vérifie $f'(x) \approx 1.25 \times 3.5^x$.

Figure 10.2 – Il semble qu'il existe une base e ≈ 2.7183 pour laquelle $f' = f$ et $f(0) = 1$.



10.2 Définition de la fonction exponentielle

Théorème 10.6 — d'existence. Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = 1$ et $f' = f$.

Lemme 10.7 Si f est une fonction vérifiant 10.6 ne s'annulle pas et vérifie : :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x)f(-x) = 1$$

Démonstration.

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.

$\blacksquare$

Lemme 10.8 — d'unicité. Il existe une unique fonction f vérifiant le théorème 10.6.

Démonstration.

Soit deux fonctions f et g vérifiant le théorème 10.6..

Soit la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$\blacksquare$

Notation 10.1 La fonction exponentielle notée exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$:

$$\exp(0) = 1 \qquad \exp'(x) = \exp(x)$$

Corollaire 10.9 Soit deux réels a, $b \in \mathbb{R}$.

La fonction $f : x \mapsto \exp(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = a\exp(ax+b)$.

Lemme 10.10 — de positivité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Démonstration. Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

■

Théorème 10.11 La fonction $\exp : x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Sa fonction dérivée étant elle-même et elle est positive ! ■

Corollaire 10.12

Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto \exp(ax+b)$ est strictement croisante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto \exp(ax+b)$ est strictement croisante sur $\mathbb{R}$.

Définition 10.2 — nombre d'Euler. On note $e = \exp(1) \approx 2.71828183$.

Propriétés 10.13 Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

(i) $\exp(0) = 1$

(ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(iii) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. En particulier $\exp(x+1) = \mathrm{e}\exp(x)$

(iv) $\exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$. En particulier $\exp(2x) = (\exp(x))^2$.

(v) $\exp(x) > 0$, et $\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Démonstration.

(i) par définition

(ii) conséquence du lemme 10.7

(iii) Pour y fixé, on définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

γ vérifie aussi les conditions du théorème 10.6.

Par le lemme d'unicité 10.8, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

(iv) application répétée du (iii), par exemple pour $n = 3$:

(v) $\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$.

■

Notation 10.2 — puissance. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Cette notation est cohérente permet d'affirmer reformuler les propriétés 10.13 comme une généralisation des propriétés connues des puissances à exposants entiers.

Propriétés 10.14 Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

(i) $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} = \exp(1)$

(ii) $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

(iii) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ et $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$

(iv) $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ pour $n \in N$

(v) $\mathrm{e}^x > 0$ et $\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

R Pour un exposant $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{e}^n = e \times e \ldots e$ et $\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$

R La suite $\left(\mathrm{e}^{nx}\right) = \left(\exp(nx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

10.3 Équations exponentielles (un début pour la terminale)

Définition 10.3

Une *équation exponentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît en exposant.

Pour résoudre une équation exponentielle, on pourra utiliser les propriétés des puissances, ainsi que le principe suivant :

$$a^x = a^y \iff x = y$$

■ Exemple 10.5 — résolution en ramenant à la même base.

$4^{x-2} = 16$	$3^x = 3 \times 9^{x-1}$
$4^{x-2} = 4^2$	$3^x = 3 \times \left(3^2\right)^{x-1}$
$x - 2 = 2$	$3^x = 3^{1+2(x-1)}$
$x = 4$	$x = 2x - 1 \iff x = 1$

■ Exemple 10.6 — quelle puissance a^x vaut b ?.

$\text{puissance}_2(8) = 3$	$\text{puissance}_4(64) = \ldots$	$\text{puissance}_{10}(100) = \ldots$
$\text{puissance}_5(25) = 2$	$\text{puissance}_7(1) = \ldots$	$\text{puissance}_{10}(1\ 000\ 000) = \ldots$
$\text{puissance}_3(27) = \ldots$	$\text{puissance}_7(\frac{1}{7}) = \ldots$	$\text{puissance}_{73}(1) = \ldots$
$\text{puissance}_4(1) = \ldots$	$\text{puissance}_3(\frac{1}{9}) = \ldots$	$\text{puissance}_{100}(10) = \ldots$
$\text{puissance}_4(16) = \ldots$	$\text{puissance}_1(5) = ?$	$\text{puissance}_{0.01}(100) = \ldots$

Définition 10.4 — logarithmes de base $a > 0$ et $a \neq 1$. Soit le réel positif $b > 0$.

L'unique solution de l'équation $a^x = b$ d'inconnue x s'appelle « logarithme de base a de b ».

On la note $\log_a(y)$:

$$\textit{(notation exponentielle)} \quad a^x = b \iff x = \log_a(b) \quad \textit{(notation logarithme)}$$

R b admet un unique antécédent par la fonction exponentielle de base a : $f : x \mapsto a^x$.

■ Exemple 10.7

1. $\log_2(8) = 3$ car $2^3 = 8$.
2. $\log_5(25) = 2$ car $5^2 = 2$.
3. $\log_5(-25)$ n'est pas défini car l'équation $5^x = -25$ n'admet pas de solution.
4. $\log_{-4}(16)$ n'est pas défini, car la base du logarithme doit être $a > 0$.

Notation 10.3 — logarithme de base 10. Soit $b > 0$.

L'unique solution de l'équation $10^x = b$ s'appelle logarithme en base 10 de b, et se note simplement $\log_{10}(b) = \log(b)$.

■ **Exemple 10.8**

$\log(10) = 1$ signifie $10 = 10^1$

$\log(100) = 2$ signifie $100 = 10^2$

$\log(10^{17}) = \ldots$

$\log(0{,}001) = -3$ signifie $0{,}001 = 10^{-3}$

■ **Exemple 10.9** Résoudre les équations suivantes. Vous donnerez une solution à 10^{-3} près.

$$\begin{aligned} 10^{x-2} &= 300 \\ x-2 &= \log(300) \\ x &= \log(300)+2 \approx 7.704 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\times 10^{2x} &= 250 \\ 10^{2x} &= \frac{250}{3} \\ 2x &= \log\left(\frac{250}{3}\right) \\ x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{250}{3}\right) \approx 2.211 \end{aligned}$$

Définition 10.5 — logarithme naturel ou népérien.

Soit les réels positifs $y > 0$ et $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Les équations $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \exp(x)$ d'inconnue x admettent une unique solution.
2. y admet un unique antécédent par la fonction exponentielle : $f : x \mapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Ce réel est noté $\ln(y) = \log_{\mathrm{e}}(y)$ « logarithme népérien de y »:

$$y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln(y)$$

■ **Exemple 10.10**

$\ln(1) = 0$ signifie $\mathrm{e}^0 = 1$

$\ln(2) \approx 0.69315$ signifie que $\mathrm{e}^{0.69315} \approx 1.99991$.

$\ln(\mathrm{e}) = 1$ signifie $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

$\ln(10) \approx 2.30259$ signifie que $\mathrm{e}^{2.30259} \approx 10.00015$.

$\ln(\mathrm{e}^2) = 2$

$\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = \ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}$

$\ln(\mathrm{e}^x) = x$

$\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1$

Notation 10.4 Soit un réel $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit : $a^x = \exp(x\ln(a)) = \mathrm{e}^{\ln(a)\times x}$.

Théorème 10.15 La fonction exponentielle de base a définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ est dérivable :

$$f'(x) = \ln(a)a^x$$

10.4 Exercices

10.4.1 Exercices : fonctions exponentielles de base a, approche qualitative

Exercice 10.1 Voir la solution

1. Compléter les tableaux de valeurs des fonctions suivantes.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x-1$					

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)=4^{-x}$		16	4		

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)=5^{-x}$				0.2		

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$h(x)=3^{-x}$				3		

x	-2	-1	0	1	2
$i(x)=\left(\dfrac{5}{4}\right)^x$			1	1.25	

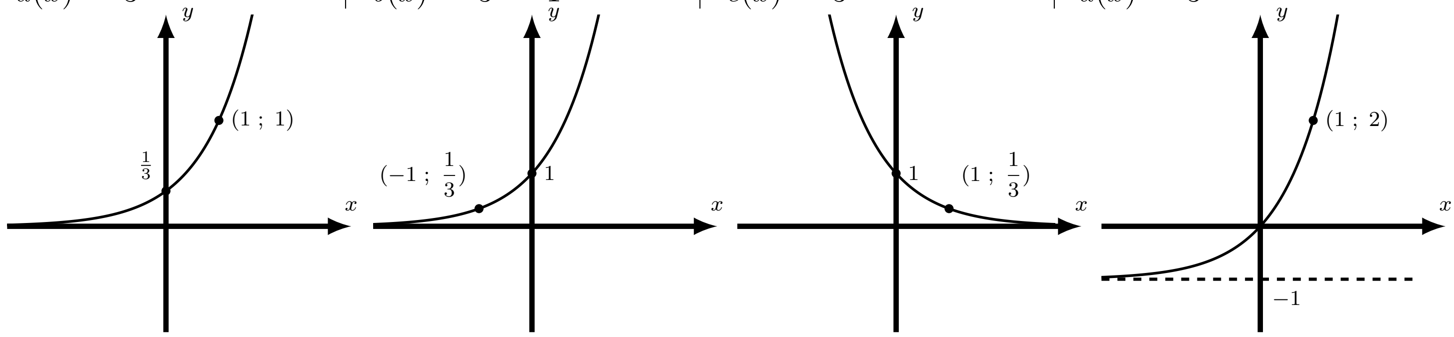
x	-2	-1	0	1	2
$j(x)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x$			1	0.4	

2. Déterminer l'ordonnée à l'origine des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=0.25^x$ | b) $f(x)=3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ | c) $f(x)=-7\times 3^x+6$

3. Associer chaque fonction donnée par son expression pour $x\in\mathbb{R}$ à sa représentation :

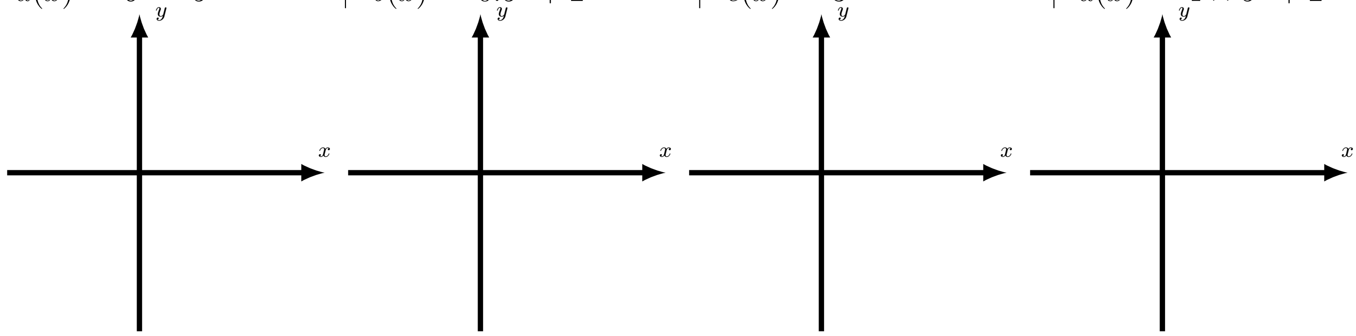
$a(x)=\ 3^x$ | $b(x)=\ 3^x-1$ | $c(x)=\ 3^{x-1}$ | $d(x)=\ 3^{-x}$



4. Représenter à main levée les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par leur expression :

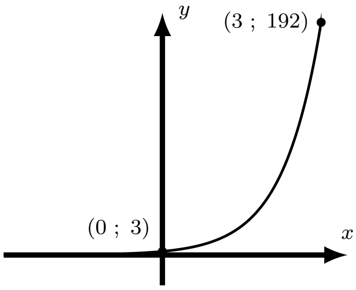
Préciser l'ordonnée à l'origine, l'image de 1 *et le comportement en* $+\infty$ *et* $-\infty$*.*

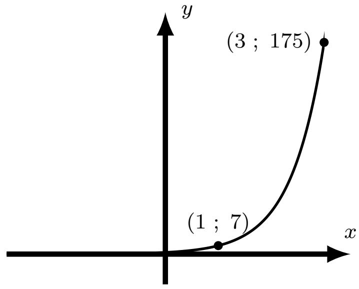
$a(x)=\ 6^x-5$ | $b(x)=\ 0.5^x+2$ | $c(x)=\ 3^{-x+2}$ | $d(x)=\ 4\times 5^x+2$



5. Déterminer l'expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a^x$ dont la représentation graphique passe par le point $A(4\ ;\ 9)$.

6. Déterminer les expressions des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ka^x$ dont les représentation sont données ci-dessous





Exercice 10.2 Voir la solution

À l'aide de votre calculatrice donner la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'image de a par les fonctions exponentielles données par leur expression.

1. $f(x) = 3{,}4^x$ et $a = 5{,}6$.
2. $f(x) = 2{,}3^x$ et $a = \dfrac{3}{2}$.
3. $f(x) = 5^x$ et $a = -\pi$.
4. $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x}$ et $a = \dfrac{3}{10}$.
5. $f(x) = 5000(2^x)$ et $a = -1{,}5$.
6. $f(x) = 200(1{,}2)^{12x}$ et $a = 24$.

■ **Exemple 10.11 — résoudre des équations exponentielles en ramenant à la même base.**

$$2^x = 16 \qquad 2^x = 2^4 \qquad x = 4$$

$$3^{x+2} = \frac{1}{27} \qquad 3^{x+2} = 3^{-3} \qquad x + 2 = -3 \qquad x = -5$$

$$4^x = 8 \qquad (2^2)^x = 2^3 \qquad 2^{2x} = 2^3 \qquad 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$$

$$9^{x-2} = \frac{1}{3} \qquad (3^2)^{x-2} = 3^{-1} \qquad 3^{2(x-2)} = 3^{-1} \qquad 2x - 4 = -1 \iff x = \frac{3}{2}$$

Exercice 10.3 Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires suivantes puis vérifier les solutions obtenues.

1. $(E_1)\ 2^x = 2$ | $(E_2)\ 2^x = \dfrac{1}{2}$ | $(E_3)\ 2^{x-3} = \dfrac{1}{4}$
2. $(E_1)\ 3^x = 27$ | $(E_2)\ 3^{2x} = \dfrac{1}{3}$ | $(E_3)\ 3^{x-1} = 9$
3. $(E_1)\ 2^x = 1$ | $(E_2)\ 6^{x+1} = 1$ | $(E_3)\ 0.1^{x-5} = 1$
4. $(E_1)\ 2^6 = 2^{4x-2}$ | $(E_2)\ 2^{x+1} = 8$ | $(E_3)\ 2^{1-2x} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 10.4 Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires suivantes puis vérifier les solutions obtenues.

1. $(E_1)\ 25^x = 5$ | $(E_2)\ 4^x = \dfrac{1}{8}$ | $(E_3)\ 0.1^x = 1000$
2. $(E_1)\ 9^{x-3} = 3$ | $(E_2)\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-x} = 8$ | $(E_3)\ 4^{2x-1} = \dfrac{1}{2}$
3. $(E_1)\ 3^{4x} = 9^{x+5}$ | $(E_2)\ 5^{x+2} \times 25^{-x} = 625$ | $(E_3)\ 4^{x+2} - 8^x = 0$

■ **Exemple 10.12** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{2x+2} - 7(2^{x+1}) = 8$.

$$2^2 \times 2^{2x} - 7 \times 2 \times 2^x = 8 \iff 4\left(2^x\right)^2 - 14\left(2^x\right) = 8$$

Changement de variable $t = 2^x$

$$t \text{ vérifie : } \quad 4t^2 - 14t = 8$$

$$t = 4 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^2 \qquad \text{ou} \qquad 2^x = -\frac{1}{2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$

$$x = 2 \qquad \qquad \text{impossible}$$

Exercice 10.5

Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires suivantes puis vérifier les solutions obtenues.

(E_1) $2 \times 4^x - 3 \times 2^x - 20 = 0$ | (E_2) $2^{2x+1} - 3 \times 2^{x+2} = 32$

■ **Exemple 10.13** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9 \times 3^{-3x} - 10(3^{-x}) + 3^x = 0$.

$$9 \times (3^x)^{-3} - 10(3^x)^{-1} + 3^x = 0 = 0$$

Changement de variable $t = 3^x$

$$t \text{ vérifie : } \quad 9t^{-3} - 10t^{-1} + t = 0$$

$\times t^3$

$$9 - 10t^2 + t^4 = 0$$

$$(t^2)^2 - 10(t^2) + 9 = 0$$

équation bicarrée

$$t^2 = 9 \quad \text{ou} \quad t^2 = 1$$

$t = 3^x > 0$

$$3^x = 3 \quad \text{ou} \quad 3^x = 1$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Exercice 10.6

Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires suivantes puis vérifier les solutions obtenues.

(E_1) $2 \times 5^{-x} - 5^x = 1$ | (E_2) $4 \times 2^{-3x} - 5 \times 2^{-x} + 2^x = 0$

■ **Exemple 10.14 — Résolution par lecture graphique de l'équation** $3^x = 100$.

1. Trace la représentation graphique de $f : x \mapsto 3^x$ sur votre calculatrice.
2. Déterminer une valeur approchée de l'antécédent de 100 par f : $x \approx 4.192$

Exercice 10.7

Voir la solution

Résoudre par lecture graphique les équations suivantes :

1. $2^x = 20$
2. $(1.2)^x = 3$
3. $2^x = 100$
4. $(1.04)^x = 4.238$
5. $3^x = 30$
6. $(0.9)^x = 0.5$

10.4.2 Exercices : dérivation de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle exp est définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

C'est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\exp' = \exp$.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$: la dérivée de la fonction $g\colon x \mapsto \exp(ax+b) = \mathrm{e}^{ax+b}$ est $g'(x) = a\exp(ax+b) = a\mathrm{e}^{ax+b}$.

■ Exemple 10.15

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\exp(2x+1) + \exp(-3x) \\ f'(x) &= 2\times 2\exp'(2x+1) + (-3)\exp'(-3x) \\ &= 4\exp(2x+1) - 3\exp(-3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x-2} - \mathrm{e}^{-kx} \\ f'(x) &= \frac{3}{6}\exp(3x-2) - (-k)\mathrm{e}^{-kx} \\ &= \frac{1}{2}\exp(3x-2) + k\mathrm{e}^{-kx} \end{aligned}$$

Exercice 10.8 Voir la solution

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1. a) $f(x) = \exp(4x)$ | b) $f(x) = \exp(x) + 3$ | c) $f(x) = 5\exp(-2x)$
2. a) $f(x) = 2\exp\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ | b) $f(x) = 2\exp\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ | c) $f(x) = 1 - 2\exp(-x)$
3. a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ | b) $f(x) = 20(1 - \mathrm{e}^{-2x})$ | c) $f(x) = 3 - 5\mathrm{e}^{-0.02x}$

Exercice 10.9 Voir la solution

Dans chacun des cas suivants, choisir parmi les propositions une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a :

1. $f(x) = \exp(x)$ et $a = 0$
   ☐ $y = x - 1$ | ☐ $y = x$ | ☐ $y = 1$ | ☐ $y = x + 1$
2. $f(x) = \exp(2x)$ et $a = 0$
   ☐ $y = 2x + 1$ | ☐ $y = x + 2$ | ☐ $y = 2$ | ☐ $y = x$
3. $f(x) = 3\exp(-x) - 1$ et $a = 0$
   ☐ $y = x + 3$ | ☐ $y = -3x + 2$ | ☐ $y = 3x + 2$ | ☐ $y = 3x - 1$
4. $f(x) = \exp(x - 1)$ et $a = 1$
   ☐ $y = 1$ | ☐ $y = x$ | ☐ $y = x + 1$ | ☐ $y = x - 1$
5. $f(x) = 2\exp(4x) - 1$ et $a = 0$
   ☐ $y = 2x - 1$ | ☐ $y = 7x - 1$ | ☐ $y = 8x + 1$ | ☐ $y = 2x + 1$

■ **Exemple 10.16 — des produits d'expressions du type** $\exp(ax+b) = \mathrm{e}^{ax+b}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \exp(1-3x) \\ f'(x) &= (x^2)' \exp(1-3x) + x^2(\exp(1-3x))' \\ &= (2x)\exp(1-3x) + x^2(-3)\exp'(1-3x) \\ &= 2x\exp(1-3x) - 3x^2\exp(1-3x) \\ &= (2x-3x^2)\exp(1-3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)\mathrm{e}^{ax} \\ f'(x) &= (x+2)'\mathrm{e}^{ax} + (x+2)\left(\mathrm{e}^{ax}\right)' \\ &= \mathrm{e}^{ax} + (x+2)a\mathrm{e}^{ax} \\ &= (1+a(x+2))\,\mathrm{e}^{ax} \\ &= (ax+2a+1)\,\mathrm{e}^{ax} \end{aligned}$$

Exercice 10.10 — des produits. Voir la solution

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1. a) $f(x) = x\exp(x)$ | b) $f(x) = x^2\exp(3x)$ | c) $f(x) = x^3\exp(1-x)$
2. a) $f(x) = (x^2-4x+3)\exp(x)$ | b) $f(x) = (x-1)\exp(2x-3)$ | c) $f(x) = 10x\exp(1-2x)$
3. a) $f(x) = (3x+5)\mathrm{e}^{-x}$ | b) $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-0{,}8x}$ | c) $f(x) = (x^3+2x+5)\mathrm{e}^{2x}$
4. a) $f(x) = (2-x\mathrm{e}^x)^2$ | b) $f(x) = (\mathrm{e}^x+2)^4$ | c) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}$

■ **Exemple 10.17 — des quotients d'expressions du type** $\exp(ax+b) = \mathrm{e}^{ax+b}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\exp(2x)}{x} \\ f'(x) &= \frac{(\exp(2x))'x - \exp(2x)(x)'}{x^2} \\ &= \frac{2\exp'(2x)x - \exp(2x)(1)}{x^2} \\ &= \frac{2x\exp(2x) - \exp(2x)}{x^2} = \frac{(2x-1)}{x^2}\exp(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4\mathrm{e}^{-x}+3} \\ f'(x) &= \frac{-3(4\mathrm{e}^{-x}+3)'}{(4\mathrm{e}^{-x}+3)^2} \\ &= \frac{-12(-\mathrm{e}^{-x})}{(4\mathrm{e}^{-x}+3)^2} \\ &= \frac{12\mathrm{e}^{-x}}{(4\mathrm{e}^{-x}+3)^2} \end{aligned}$$

Exercice 10.11 — des quotients. Voir la solution

Pour chacune des fonctions d'efinies par les expressions suivantes, d'eterminer l' expression de sa dérivée. Lorsque cela et possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ | 2. $f(x) = \dfrac{x}{3x+\exp(-x)}$ | 3. $f(x) = \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{3x-2}+1}$

Exercice 10.12 Voir la solution

Déterminer pour chaque cas, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a :

1. a) $f(x) = (x^2+x-3)\exp(x)$ et $a=0$. | b) $f(x) = (x+1)\exp(-2x+2)$ et $a=1$.
2. a) $f(x) = \dfrac{2}{4+3\mathrm{e}^{1-x}}$ et $a=1$ | b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2}{\mathrm{e}^{3x}+3}$ et $a=0$

10.4.3 Exercices : signe et sens de variation de fonctions exponentielles

La fonction exponentielle est strictement positive, et strictement croissante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall a < 0 < b \quad \text{on a} \quad \exp(a) < 1 < \exp(b)$$

Exercice 10.13 Voir la solution

Déterminer le signe des réels suivants.

	Strictement positif	Strictement négatif
1/ $\exp\left(\frac{-5}{29}\right)$	☐	☐
2/ $-8\exp(9)$	☐	☐
3/ $-3\exp(2{,}5)$	☐	☐
4/ $\exp(\sqrt{7})$	☐	☐
5/ $\exp(5)$	☐	☐
6/ $\exp(-1)$	☐	☐

	Strictement positif	Strictement négatif
1/ $e^3 - 1$	☐	☐
2/ $e^2 - e^1$	☐	☐
3/ $e^{-1} - 1$	☐	☐
4/ $e^{0,5} - 1$	☐	☐
5/ $e^{-0,5} - 1$	☐	☐
6/ $\exp(-2) + 1$	☐	☐

■ **Exemple 10.18 — étude de variation d'une fonction.**

Montrer que la fonction définie par $f(x) = 5\exp(-2x+1)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée affine par une fonction exponentielle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -10\exp(-2x+1) < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 10.14 Voir la solution

Montrer que les fonctions suivantes sont strictement monotones sur $\mathbb{R}$:

1. a) $f(x) = \exp(7x+4)$ | b) $f(x) = 6 - 5\exp(-0{,}4x)$ | c) $f(x) = 2\exp(1-3x) - 1$
2. a) $f(t) = 5e^{-3t}$ | b) $f(t) = -3e^{5t}$ | c) $f(t) = \dfrac{5}{e^{-7t}}$
3. a) $f(x) = \dfrac{2}{4+3\exp(-x)}$ | b) $f(x) = \dfrac{2}{(1+e^{3x})^2}$ | c) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

Pour $k > 0$:

— les fonctions $f\colon x \mapsto e^{kx}$ et $g\colon x \mapsto e^{kx+c}$ sont strictement croissantes et positives.

— les fonctions $f\colon x \mapsto e^{-kx}$ et $g\colon x \mapsto e^{-kx+c}$ sont strictement décroissantes et positives.

■ **Exemple 10.19 — étude de variation d'une fonction.**

Montrer que la fonction définie par $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2+1)'\mathrm{e}^x + (x^2+1)\left(\mathrm{e}^x\right)' = (x^2-2x+1)\mathrm{e}^x = (x-1)^2\mathrm{e}^x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $(x-1)^2$.

f' est strictement positive sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, $\therefore f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

■ **Exemple 10.20 — étude de variation d'une fonction avec tableau de signe.**

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

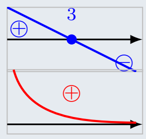
1. Préciser le domaine de f et le domaine de dérivabilité de f
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{-x}$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

1. dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1)\mathrm{e}^{-x} + (x-2)(-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-(x-2))\mathrm{e}^{-x} \\ &= (3-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3 - x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f		$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	



■

Exercice 10.15 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 10.16 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-8x)\exp(-2x)$.

1. a) Déterminer $f(0)$ et donner une interprétation graphique de la valeur obtenue.
   b) Résoudre $f(x) = 0$ et donner une interprétation graphique de la valeur obtenue.
2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = (16x-14)\mathrm{e}^{-2x}$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 10.17

Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \exp(2x)$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la dérivée f' vérifie $f'(x) = (2x^2 + 2x)\exp(2x)$.
3. Déterminer les valeurs critiques de f et dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 10.18

Voir la solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}\exp(-x)$.

1. Déterminer le domaine de f et justifier que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\exp(-x)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 10.19

Voir la solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - x)\exp(2x+1)$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = (2x^2 - 1)\exp(2x+1)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 10.20

Voir la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2 - 5x + 1)\exp(-2x+1)$.

1. Déterminer $f(0)$. Interpréter graphiquement la valeur obtenue.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et intepréter graphiquement les solutions obtenues.
3. a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = (-8x^2 + 18x - 7)\exp(-2x+1)$.
4. Déterminer les solutions de $f'(x) = 0$.
5. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 10.21

Voir la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\exp(x)$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$. Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Affirmation n° 1 « Le point $A(0\ ;\ 1) \in \mathscr{C}_f$. »

Affirmation n° 2 « Pour tout x on a $f'(x) = 2e^x$. »

Affirmation n° 3 « La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$ est horizontale. »

Affirmation n° 4 « La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$. »

Affirmation n° 5 « La fonction est positive sur $\mathbb{R}$. »

10.4.4 Exercices : problèmes inverses

Exercice 10.22 Voir la solution

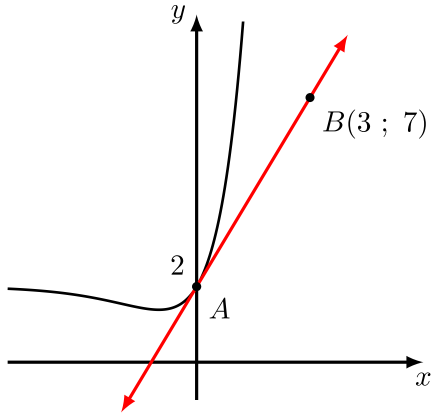
$\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax\mathrm{e}^x + b$

a et b sont deux réels à déterminer.

On note f' la dérivée de f.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\ ;\ 2)$ passe par $B(3\ ;\ 7)$.



1. Justifier que $f(0) = 2$ et en déduire la valeur de b.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(1+x)\mathrm{e}^x$.
3. Justifier que $f'(0) = \dfrac{5}{3}$, et en déduire la valeur de a.

Exercice 10.23 Voir la solution

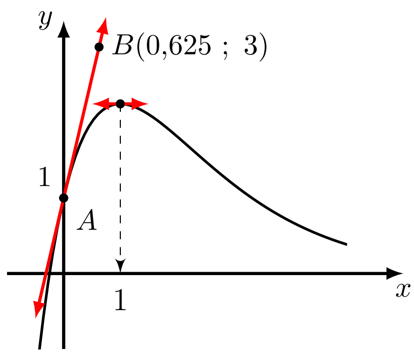
$\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (ax+1)\exp(-cx)$

où a et c sont des réels *positifs* à déterminer.

On note f' la dérivée de f.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\ ;\ 1)$ passe par $B(0+36\ ;\ 3)$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



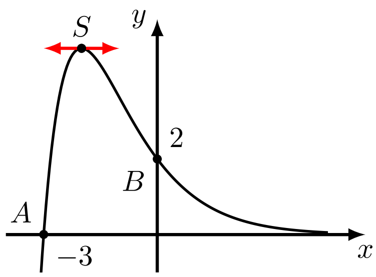
1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (-acx + a - c)\exp(-cx)$.
2. Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$ et en déduire que a et c vérifient le système :
$$\begin{cases} a - c = 3{,}2 \\ ac = 3{,}2 \end{cases}$$
3. En déduire les valeurs de a et c. On déterminera une équation quadratique vérifiée par c.

Exercice 10.24 Voir la solution

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$

a et b sont des réels à déterminer.



1. Sachant que $A(-3\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_f$, déterminer a et b.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{2}{3}(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les coordonnées du point critique S.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f. Donner la nature du point critique.

10.4.5 Exercices : propriétés algébriques de la fonction exponentielle

■ **Exemple 10.21** — **utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.**

$A = \exp(5)\exp(-2)\exp(0)$
$= \exp(5+(-2)+0)$
$= \exp(3)$
$= e^3$

$B = \dfrac{\exp(4)}{\exp(-3)} = \dfrac{e^4}{e^{-3}}$
$= \exp(4-(-3)) = e^{4-(-3)}$
$= \exp(7) = e^7$

$C = (\exp(-1))^2\sqrt{\exp(4)}$
$= (e^{-1})^2\sqrt{e^4}$
$= e^{-1\times 2}e^{\frac{4}{2}}$
$= e^0 = 1$

Exercice 10.25 Voir la solution

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^3e^4$; $B = \dfrac{e^{-5}}{e^2}$ | $C = \dfrac{1}{e^{-2}}$; $D = ee^5 + 5(e^2)^3$ | $E = \sqrt{e^6}$; $F = \sqrt{\dfrac{e}{e^{-3}}}$
2. $A = \exp(2)\exp(-4)$ | $B = \exp(5)\exp(-2)\exp(0)$ | $C = \exp(-1)(\exp(-3))^2$
3. $A = \dfrac{\exp(4)}{\exp(-3)}$ | $B = (\exp(3))^{-2}\exp(5)$ | $C = \dfrac{\exp(7)\exp(-8)}{\exp(2)}$
4. $A = \sqrt{\exp(4)}$ | $B = \sqrt{\exp(-10)}$ | $C = \dfrac{\sqrt{\exp(-8)}}{\exp(7)}$

Exercice 10.26 Voir la solution

Simplifier les expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

1. $A = e^xe^{-x}$ | $B = \left(e^{3x+2}\right)^2$ | $C = \exp(2x+1)\exp(-3x+5)$
2. $A = e^{-x}(e^x - 2)$ | $B = (e^x - 1)(e^x + 3)$ | $C = e^{2x}\left(e^x - e^{-x}\right)$
3. $A = \dfrac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}}$ | $B = \dfrac{\exp(x-1)}{\exp(-x+2)}$ | $C = \left(\exp(x+1)\right)^2\sqrt{\exp(-2x)}$

Exercice 10.27 — **exponentielles et identités remarquables.** Voir la solution

Simplifier les expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

1. $A = (e^x + 1)^2$ | $B = (e^x - 3)(e^x + 3)$ | $C = (e^x - e^{-x})^2$
2. $A = (3\exp(x) - \exp(-x))^2$ | $B = (2\exp(2x) + 3\exp(-x))^2$ | $C = (1+\exp(x))(1-\exp(x))$

Exercice 10.28 — **factorisations et identités remarquables.** Voir la solution

Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser à l'aide d'identités remarquables les expressions suivantes :

1. $A = e^{-4x} - 25$ | $B = 9e^{-2x} - 6 + e^{2x}$ | $C = e^x - 2 + e^{-x}$
2. $A = \exp(2x) - 4$ | $B = 16\exp(4x) - 9$ | $C = 9\exp(2x) - 4\exp(-2x)$
3. $A = e^{2x} + 4 + 4e^{-2x}$ | $B = e^{6x} + 9e^{-2x} - 6e^{2x}$ | $C = 4e^{6x} + 12e^{3x} + 9$

Exercice 10.29 Voir la solution

Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\dfrac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$
2. $\dfrac{e^{x+1}}{e + e^{x+1}} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$
3. $1 - \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$
4. $\dfrac{1}{e^x + 1} + \dfrac{1}{e^{-x} + 1} = 1$
5. $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
6. $\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} = e^x - e^{-x}$

10.4.6 Exercices : résolution d'équations exponentielles

■ **Exemple 10.22** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$e^{3x+5} = e^{2x+4} \iff 3x + 5 = 2x + 4 \iff x = -1$$

$\mathscr{S} = \{-1\}$

$$e^{2x-x^2} = 1 \iff e^{2x-x^2} = e^0 \iff 2x - x^2 = 0$$

$\mathscr{S} = \{0\ ;\ 2\}$

$$2e^x + 5 = 3 \iff 2e^x = -2 \iff e^x = -1$$

Pas de solutions

Exercice 10.30 Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (E_1) $e^x = e^{-4}$ | (E_2) $e^{-x} = 1$ | (E_3) $e^x + 4 = 0$ | (E_4) $e^{2x-1} = e$
2. (E_1) $\exp(2x) = \exp(5)$ | (E_2) $\exp(x^2) = \exp(2x)$ | (E_3) $(\exp(x) - 1)(\exp(x) + 5) = 0$ | (E_4) $\exp(3x) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(-1)}$
3. (E_1) $(3x - 5)(e^x + e) = 0$ | (E_2) $(2x + 7)(e^x - e) = 0$
4. (E_1) $(3x - 5)(e^x + e) = 0$ | (E_2) $(2x + 7)(e^x - e) = 0$

■ **Exemple 10.23 — un air de déjà vu.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$$

$$(e^x)^2 + 3\,(e^x) - 4 = 0$$

changement de variable $t = e^x$

$$\iff t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\iff t = 1 \text{ ou } t = -4$$

$$e^x = 1 \text{ ou } e^x = -4$$

$$\mathscr{S} = \{0\}$$

$$e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$$

$\times e^x \neq 0$

$$\iff e^{2x} - 2 + e^x = 0$$

$$\iff t^2 + t - 2 = 0$$

$$\iff t = 1 \text{ ou } t = -2$$

$$e^x = 1 \text{ ou } e^x = -2$$

$$\mathscr{S} = \{0\}$$

Exercice 10.31 Voir la solution

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 + 6t - 7 = 0$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x - 7e^{-x} + 6 = 0$.

Exercice 10.32 — entrainement. Voir la solution

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2-(1+\mathrm{e})t+\mathrm{e}=0$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\exp(2x)-(1+\mathrm{e})\exp(x)+\mathrm{e}=0$.

Pour tout $a>0$, si $\exp(x)=a$ alors $x=\ln(a)$

Pour $a>0$, $\ln(a)$ est l'*unique solution* de l'équation $\exp(x)=a$.

Pour $a>0$, $\ln(a)$ est l'*unique antécédent* de a par la fonction exponentielle.

Exercice 10.33 — concepts. Voir la solution

1. $\ln(1)$ est l'unique solution de $\mathrm{e}^x=\ldots$, donc $\ln(1)=$ ....
2. $\ln(\mathrm{e})$ est l'unique solution de $\mathrm{e}^x=\ldots$, donc $\ln(\mathrm{e})=$ ....
3. $\ln(\mathrm{e}^2)$ est l'unique solution de $\mathrm{e}^x=\ldots$, donc $\ln(\mathrm{e}^2)=$ ....
4. $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ est l'unique solution de $\mathrm{e}^x=\ldots$, donc $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=$ ....
5. $\ln(5)$ est l'unique solution de $\mathrm{e}^x=\ldots$, donc **(A)** $\ln(5)>0$ **(B)** $\ln(5)<0$
6. $\ln(0{,}5)$ est l'unique solution de $\mathrm{e}^x=\ldots$, donc **(A)** $\ln(0{,}5)>0$ **(B)** $\ln(0{,}5)<0$
7. $\ln(-1)$ n'existe pas, car l'équation ...., n'a pas de solutions.
8. $\ln(0)$ n'exite pas, car l'équation ...., n'a pas de solutions.

■ **Exemple 10.24 — vers la terminale.**

$$\begin{aligned}\exp(x)&=30\\ x&=\ln(30)\\ x&\approx 3{,}401\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}&=21\\ \frac{x}{3}&=\ln(21)\\ x&=3\ln(21)\\ x&\approx 9{,}133\end{aligned}\qquad\begin{aligned}20\mathrm{e}^{4x}&=5\\ \mathrm{e}^{4x}&=\frac{1}{4}\\ 4x&=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\\ x&=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right)\\ x&\approx 0{,}346\end{aligned}$$

Exercice 10.34 Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. (E_1) $\mathrm{e}^x=10$	(E_2) $\mathrm{e}^x=0{,}5$	(E_3) $\mathrm{e}^x=0{,}1$
2. (E_1) $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)=5$	(E_2) $\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}=15$	(E_3) $\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}=0{,}015$
3. (E_1) $20\mathrm{e}^{0.06x}=8{,}3$	(E_2) $50\mathrm{e}^{-0.03x}=0{,}82$	(E_3) $40\mathrm{e}^{0.6x}=1\ 000$

Exercice 10.35 Voir la solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=0$ à l'aide du changement de variable $t=\mathrm{e}^x$.

10.4.7 Exercices : résolution d'inéquations exponentielles

Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$.

Exemple 10.25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{4x-4} \\ \iff & x^2 > 4x-4 \\ \iff & x^2-4x+4>0 \\ \iff & (x-2)^2>0 \\ & S=\mathbb{R}\setminus\{2\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{e}^{3x-1} \leqslant 1 \\ \iff & \mathrm{e}^{3x-1} \leqslant \mathrm{e}^0 \\ \iff & 3x-1 \leqslant 0 \\ \iff & x \leqslant \frac{1}{3} \\ & S=\left]-\infty;\tfrac{1}{3}\right] \end{aligned}$$

Exercice 10.36 Voir la solution

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. (I_1) $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}$ | (I_2) $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1$ | (I_3) $\exp(2x-6) > 1$
2. (I_1) $\exp(5x) \leqslant \mathrm{e}$ | (I_2) $\exp(5x)-1>0$ | (I_3) $12-4\exp(5x+1) \geqslant 8$
3. (I_1) $\exp(x^2) < \exp(x)$ | (I_2) $\exp(x^2) < (\exp(x))^5$ | (I_3) $\exp(x^2-1) \geqslant \mathrm{e}$

Exemple 10.26 — tableaux de signes simples.

Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes :

1. $A(x)=\mathrm{e}^{0.25x}+3$. Signe évident positif.

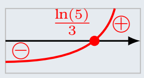
x	$-\infty$		$+\infty$
$A(x)$		$+$	

2. $B(x)=\mathrm{e}^{3x}-5$.

$B(x)=0 \iff \mathrm{e}^{3x}-5=0 \iff 3x=\ln(5) \iff x=\dfrac{\ln(5)}{3}$

La fonction $g\colon x\mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est strictement croissante, car sa dérivée est $g'(x)=3\mathrm{e}^{3x}>0$.

x	$-\infty$		$\frac{\ln(5)}{3}$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	



3. $C(x)=\mathrm{e}^{-2x}-3$.

$C(x)=0 \iff \mathrm{e}^{-2x}=3 \iff -2x=\ln(3) \iff x=-\dfrac{\ln(3)}{2}$.

La fonction $h\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est strictement décroissante, car sa dérivée est $h'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}<0$.

x	$-\infty$		$-\frac{\ln(3)}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 10.37

Voir la solution

Compléter les tableaux de signe suivants en justifiant.

x	
$e^x - 1$	

x	
$e^{0.25x} + 3$	

x	
-3	
$e^{-2x} - 2$	
$-3(e^{-2x} - 2)$	

x	
$-4e^{-2x} - 5$	

x	
$3e^x - 5$	

x	
$e^{-0.5x} - 2$	

x	
-2	
$-2e^x + 4$	

x	
$2 - 4e^{3x}$	

Exercice 10.38

Voir la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la dérivée f' vérifie $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -2x(e^x - 1)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 10.39

Voir la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 1 + 3e^{-x}$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = -3\left(e^{-x} - \frac{5}{3}\right)$.
3. Déterminer la valeur critique de f et dresser son tableau de variation.

Exercice 10.40

Voir la solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{0,5x} - 3x$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 0.5\left(e^{0.5x} - 6\right)$.
3. Déterminer la valeur critique de f et dresser son tableau de variation.