Chapitre 11

Variables aléatoires finies

Table 11.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 11…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Calcul de fonction dérivées : premiers principes			
déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire			
calculer et interprétez l'espérance d'une variable aléatoire			
calculer la variance et l'écart type d'une variable aléatoire			
TP simulations d'expériences aléatoires et estimations d'espérances et de probabilités			

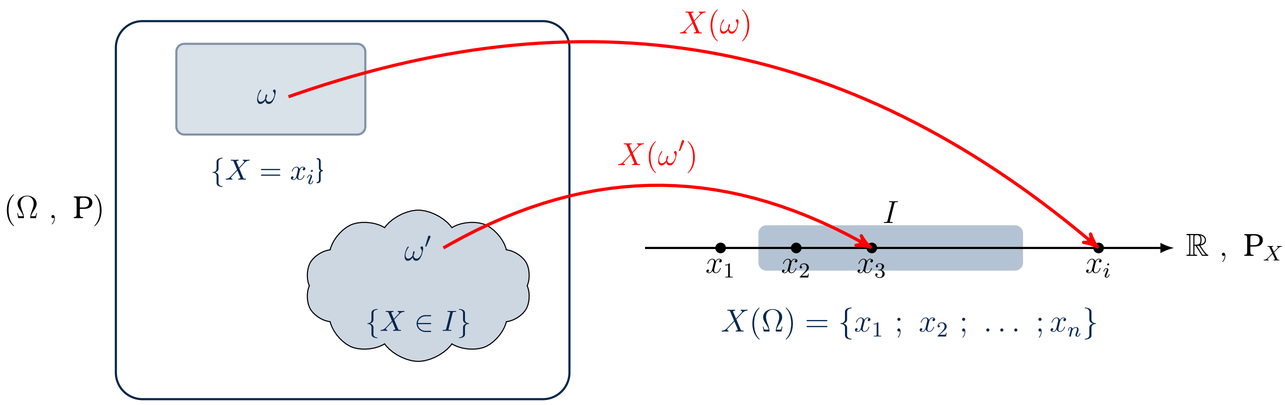
11.1 Variables aléatoires finies

Définition 11.1 — variable aléatoire.

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ doté d'une loi de probabilité P, avec $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Une variable aléatoire réelle X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

On note $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des images possibles ($\mathrm{Card}(X(\Omega)) \leqslant \mathrm{Card}(\Omega)$).



Notation 11.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on écrira :

$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ de probabilité $\mathrm{P}_X(\{x\}) = \mathrm{P}(X = x) = \displaystyle\sum_{\omega \in \{X=x\}} p(\omega)$

$\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ $\mathrm{P}_X(I) = \mathrm{P}(X \in I) = \displaystyle\sum_{\omega \in \{X \in I\}} p(\omega) = \sum_{x \in \{x \in I\}} \mathrm{P}_X(\{x\})$

Définition 11.2 — loi d'une variable aléatoire.

P_X est la *loi de la v.a.* X. C'est une loi de probabilité sur *des* parties de $\mathbb{R}$.

On calculera typiquement les probabilités de singletons $\{x\}$ ou d'intervalles I.

■ **Exemple 11.1**

Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte au hasard. Si on tire un as, on gagne 5 €. Si on tire un roi, une dame ou un valet, on gagne 1 €. Dans tous les autres cas on pert 1 €.

L'univers Ω est composé des 52 issues possibles. On note X le gain algébrique.

$X(\Omega) = \{-1\ ;\ 1\ ;\ 5\}$. $\mathrm{P}(X = 5) = \dots\dots\dots$ $\mathrm{P}(X = 1) = \dots\dots\dots$ $\mathrm{P}(X = -1) = \dots\dots\dots$

La loi de la variable X est résumée par le tableau.

x_i	-1	1	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$			

$\mathrm{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathrm{P}(X = -1) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 5) = 1$

$\mathrm{P}(X > 0) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\mathrm{P}(X > 2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\mathrm{P}_{\{X>0\}}(X > 2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

11.1.1 Indicateurs d'une variable aléatoire

Définition 11.3 X v.a. réelle finie, prenant les valeurs $x_1; \dots; x_n$.

L'*espérance de* X est le réel noté $\mathbb{E}(X)$:

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\mathrm{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(X = x_i)$$

La *variance de* X est le réel *positif ou nul* noté $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$:

$$\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \mathrm{P}(X = x_i)$$

L'*écart-type* $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$ est l'*écart quadratique moyen à* μ.

■ **Exemple 11.2** En reprenant la v.a. de l'exemple 11.1, on a :

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum x_i \mathrm{P}(X = x_i) = (-1) \times \qquad +1 \times \qquad +5\times \qquad = -\frac{1}{13}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(x) = \sum (x_i - \mu)^2 \mathrm{P}(X = x_i)$$

$$= \left(-1 - \frac{-1}{13}\right)^2 \times \qquad + \left(1 - \frac{-1}{13}\right)^2 \times \qquad + \left(5 - \frac{-1}{13}\right)^2 \times \qquad = \frac{480}{169}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(x)} = \sqrt{\frac{480}{169}} \approx 1.685$$

Proposition 11.1 — **Formule de König-Huygens.** Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

■ **Exemple 11.3** Avec la v.a. de l'exemple 11.1, on a :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum x_i^2 \mathrm{P}(X = x_i) = (-1)^2 \times \qquad +1^2 \times \qquad +5^2\times \qquad =$$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(x) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \frac{37}{13} - \left(-\frac{1}{13}\right)^2 = \frac{480}{169}$$

On repète une expérience aléatoire un nombre N *assez grand* de fois.

On enregistre les valeurs $\{x_1, \dots, x_N\}$ obtenues de la v.a. X.

On note $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$ la moyenne des valeurs observées sur les N répétitions.

Pour un grand nombre de répétition ($N \gg 1$) on a $\mathbb{E}(X) \approx \overline{x}$.

Démonstration. On note n_i le nombre d'observation de la valeur x_i durant les N répétitions.

D'après la loi des grands nombres $P(X = x_i) \approx \dfrac{n_i}{N}$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \approx \sum_i \left(x_i \frac{n_i}{N}\right) = \frac{\sum_i n_i x_i}{N} = \overline{x}$$ ■

L'écart-type est une mesure de la dispersion de la v.a. autour de la moyenne.

Plus l'écart-type est petit, plus la variable aléatoire est centrée autour de sa moyenne.

Typiquement, dans les cas dits « *favorables* » on a : $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 66\%$.

11.2 Exercices : Variables aléatoires

■ **Exemple 11.4** On considère le jeu suivant : « On lance un dé cubique équilibré et on note la face obtenue. Si le résultat est pair, on gagne 2€, si le résultat est 1, on gagne 4€. Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€. »

L'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ avec les issues 1 à 6 équiprobables.

X désigne la variable aléatoire des gains.

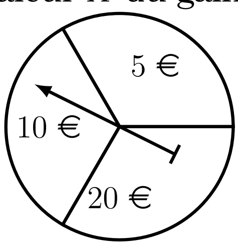
1. $X(\Omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\{X = 2\} = \{\ \ldots\ldots\ldots\ \}$ $\quad\{X = -4\} = \{\ \ldots\ldots\ldots\ \}$ $\quad\{X = 4\} = \ldots\ldots\ldots$
3. $P(X = 2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P(X = -4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P(X = 4) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. On peut résumer les probabilités précédentes sous forme de tableau :

x_i	-4	2	4	**Total**
$P(X = x_i)$				

5. $\{X \geqslant -4\} = \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}$ $\quad P(X \geqslant -4) =$
6. $\{0 < X \leqslant 4{,}5\} = \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}$ $\quad P(0 < X \leqslant 4{,}5) =$
7. $\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(x = x_i) = (-4) \times \qquad +2 \times \qquad +4\times \qquad = \dfrac{1}{3}$
8. Interprétation de l'espérance : « Si on réalise un grand nombre de lancer de dés, la moyenne des issues est environ égale à $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ».

Exercice 11.1

On fait tourner l'aiguille et on note la valeur X du gain obtenu.



1. Identifier les issues et compléter le tableau de la loi de probabilité de la v.a. X.

x en €			
$P(X = x)$			

2. Déterminer l'espérance du gain $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = \ldots \times \qquad + \ldots \times \qquad + \ldots \times \qquad =$$

3. Quel est le gain espéré par épreuve lorsqu'on prend compte de la participation de 15 € par tirage ?

Exercice 11.2

Soit l'expérience aléatoire « on tire une carte dans un jeu de 32 cartes » . Si on tire un coeur, on gagne 2€. Si on tire un roi, on gagne 5€. Dans les autres cas on perd 1€. On appelle X la variable aléatoire qui à une carte associe le gain (ou la perte).

1. Compléter afin de déterminer la loi de probabilité de X.

   La variable aléatoire X peut prendre les valeurs -1, 2, 5 et ....

   Si la carte tirée est le roi de coeur R♥, on gagne, $X = \ldots + \ldots = 7$ et $P(X = 7) =$...........

   Si la carte tirée est un coeur (mais pas un roi), $X =$........... et $P(X = \ldots) =$............

   Si la carte tirée est un roi (mais pas un coeur), $X =$........... et $P(X = \ldots) =$............

   Si la carte tirée n'est ni un coeur, ni un roi, $X =$ .... et $P(X = \ldots) =$ ....

2. Compléter le tableau définissant la loi de probabilité de X :

x	-1	2	5		**Total**
$P(X = x)$					

3. $P(X \geqslant 5) = P(X = \ldots\ldots) + P(X = \ldots\ldots) =$...

   La probabilité de ....est égale à $\frac{1}{8}$.

   Dans 1000 répétitions de l'expérience, les gains dépassent 5 € dans $1000 \times$ soit environ .... des essais.

4. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = -1 \times \quad +2 \times \quad +5 \times \quad +7\times \quad =$...........................

   Dans 1000 répétitions de l'expérience, le total des gains $\approx 1000\times$ .... $=$ .... €

Exercice 11.3

X est la v.a. des gains possibles à une loterie sans tenir compte du prix du billet :

x en €	0	5	10	100	500
$P(X = x)$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   $A =$« le joueur est gagnant ». $P(A) = P(X > \ldots\ldots) =$ ....

   $B =$« le joueur a gagné au moins 100 € ». $P(B) = P(X \geqslant \ldots\ldots) =$ ....

   $C =$« le joueur a gagné au plus 10 € ». $P(B) = P(X \leqslant \ldots\ldots) =$ ....

   $P(A \cap C) =$...

2. Calculer l'espérance du gain $\mathbb{E}(X)$:

   $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) =$...

3. L'organisateur pense fixer la participation à 20 €. Le jeu sera-t-il favorable au joueur ?

En jeu de paris, l'espérence des gains est l'espérence des dividendes attendus moins le taux de participation du jeu. Un jeu est équitable si l'espérence des gains est nulle.

Exercice 11.4

On considère le jeu de hasard. La loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant au gain est résumée dans le tableau :

x	0	3	5	50
$P(X=x)$	0.4	0.3	0.28	0.02

Sachant que le montant de la mise est fixé à 4 €, déterminer si le jeu est équitable.

Exercice 11.5

Soit les variables aléatoire X et Y dont les lois sont décrites par les tableaux ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

x_i	1	2	3	4	5
$P(Y=x_i)$	0.02	0.18	0.61	0.16	0.03

1. Compléter afin de déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\text{ar}(X)$ et $\sigma(X)$.
   a) $\mu = \mathbb{E}(X) = \sum x_i \mathrm{P}(X=x_i) = \ldots \times 0.2 + \ldots 3 \times 0.2 + \ldots \times 0.2 + \ldots \times 0.2 + \ldots \times 0.2 = \ldots\ldots\ldots$
   b) $\sigma^2 = \mathbb{V}\text{ar}(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \mathrm{P}(X=x_i) = 1 \times \ldots\ldots\ldots + 2 \times \ldots\ldots\ldots + 3 \times \ldots\ldots\ldots + 4 \times \ldots\ldots\ldots + 4 \times \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) Calcul alternatif de la variance à l'aide de la formule de Koenig :
   $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum x_i^2 \mathrm{P}(X=x_i) = \ldots \times 0.2 + \ldots 3 \times 0.2 + \ldots \times 0.2 + \ldots \times 0.2 + \ldots \times 0.2 = \ldots\ldots\ldots$
   $\sigma^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   d) L'écart-type est $\sigma =$
   Pour une épreuve, la valeur de X diffère de ....d'un écart de typiquement ....
2. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$, la variance $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

Exercice 11.6

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous :

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	k	$2k$	$4k$	$2k$	k

1. Donner une équation vérifiée par k et en déduire k
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
3. On repète l'expérience 1000 fois, et on note les valeurs de X observées.
   a) Donner une estimation du nombre d'observations de l'événement $\{X=1\}$
   b) Donner une estimation de la somme des observations.

Exercice 11.7

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous :

x	10	20	30	40	50
$P(X = x)$	$\frac{k}{10}$	$\frac{k}{20}$	$\frac{k}{30}$	$\frac{k}{40}$	$\frac{k}{50}$

1. Donner une équation vérifiée par k et en déduire que $k = \frac{600}{137}$.
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
3. On repète l'expérience 100 fois, et on note $x_1, \ldots x_n$ les valeurs de X obtenues.

   Donner une estimation de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i$.
4. Déterminer la variance et l'écart-type de la v.a. Y.

Exercice 11.8

On lance deux dés (d4) équilibrés et on note les faces obtenues.

1. On considère la v.a. M correspondant au maximum des deux valeurs obtenues.

   a) Compléter le diagramme d'univers et déterminer la loi de probabilité de M.

		Dé №2
Dé №1		

Résumer la loi de la v.a. M dans le tableau ci-dessous.

x	1	2	3	4	**Total**
$P(M = x)$					

   b) En déduire l'espérance μ , la variance et l'écart-type σ de la v.a. M

   c) Interprétez l'espérance de la variable M dans le contexte de cet exercice.

   d) Déterminer $\mathrm{P}(\mu - \sigma \leqslant M \leqslant \mu + \sigma)$.

2. On considère la v.a. S donnée par la somme des deux valeurs obtenues.

   a) À l'aide du diagramme d'univers, déterminer la loi de la v.a. S.

		Dé №2
Dé №1		

Résumer la loi de la v.a. S dans le tableau ci-dessous.

x								**Total**
$P(S = x)$								

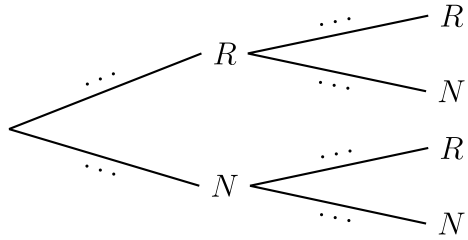
   b) En déduire l'espérance μ_S, la variance et l'écart-type σ_S de la v.a. S.

   c) Déterminer $\mathrm{P}(\mu_S - \sigma_S \leqslant S \leqslant \mu_S + \sigma_S)$.

Exercice 11.9 — **Examen blanc type E3C.**

Une urne contient deux boules rouges et trois boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard une première boule en notant sa couleur puis on la remet dans l'urne. On tire ensuite toujours au hasard une deuxième boule en notant sa couleur.

1. On note R l'évènement « tirer une boule rouge » et N l'évènement « tirer une boule noire ». Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à cette expérience.



2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Si un joueur tire une boule rouge, il gagne 20 euros. S'il tire une boule noire, il perd 10 euros.

   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, en euros, à l'issue des deux tirages successifs. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4. Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent.
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.
6. Déterminer l'écart-type de la variable X et en donner une interprétation.

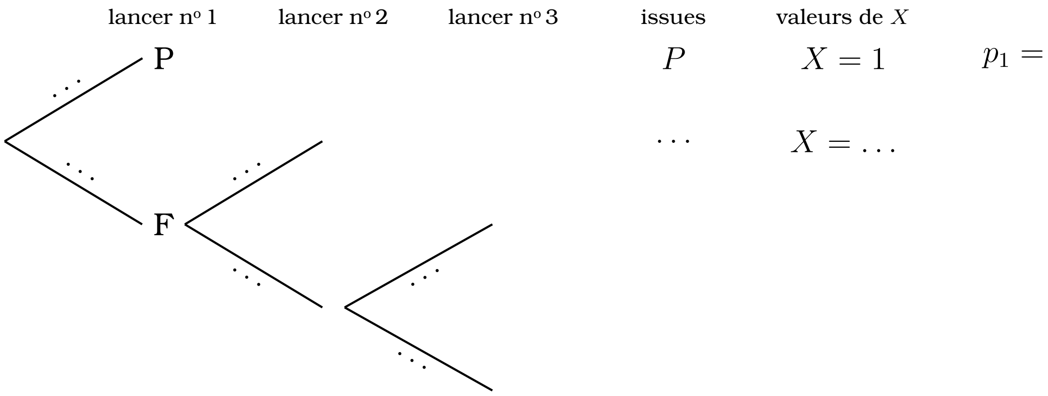
Exercice 11.10

On lance au plus trois fois une pièce bien équilibrée, et on s'arrête dès que l'on a obtenu « Pile ».

Les issues de cette expérience peuvent s'écrire : P, FP, FFP et FFF.

La variable aléatoire X correspond au nombre total de lancers.

1. En complétant l'arbre de probabilité déterminer les probabilités des issues.

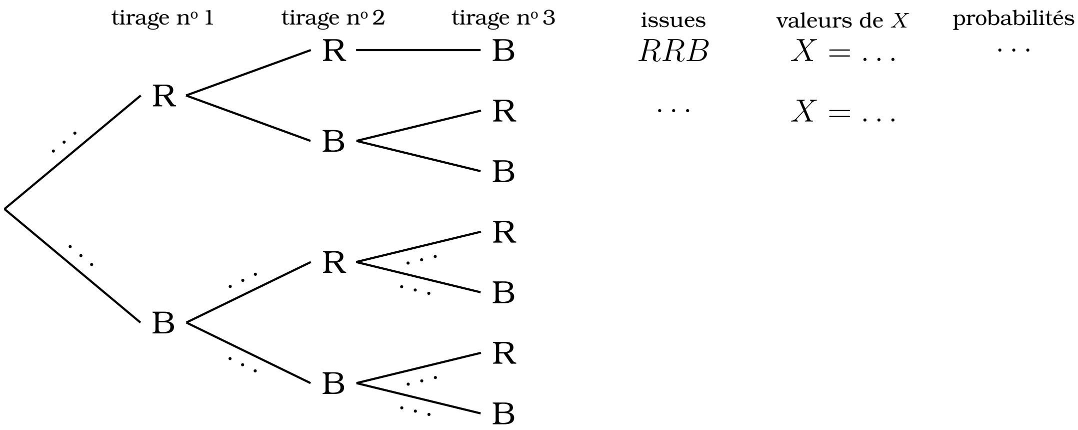


2. Déterminer la loi de probabilité de X et la résumer dans un tableau.
3. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 11.11

Une urne contient 3 boules bleues et deux boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 3 boules. X designe le nombre de boules bleues tirées.

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous et identifier les valeurs possibles de X.

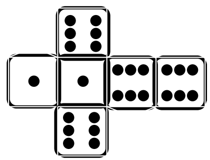


2. Déterminer la loi de probabilité de X

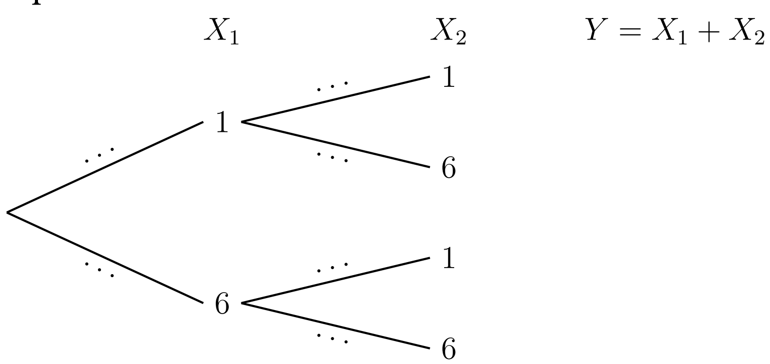
x	1	2	3	**Total**
$P(X = x)$				

3. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$, et l'écart type $\sigma(X)$ et en donner une interprétation.

Exercice 11.12

On lance deux dés de Grim magenta :  . On note X_1 la v.a. correspondant aux points affichées sur le 1 dé et X_2 celle sur le 2 dé. On considère la v.a. $Y = X_1 + X_2$.

1. a) Préciser les valeurs possibles de X_1 et X_2 et déterminer la loi de probabilité des v.a. X_1 et X_2. Résumer la dans un tableau.
   b) Déterminer $\mathbb{E}(X_1)$.
2. Complétez l'arbre de probabilité et déterminer les valeurs possibles pour Y ainsi que sa loi de probabilité. Résumer la dans le tableau ci-dessous.



x				**Total**
$P(X = x)$				

3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$. Et vérifier qu'elle est égale à $\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$

Exercice 11.13 — Examen blanc type E3C.

Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école.

Une urne opaque contient 100 billes indiscernables au toucher : 10 billes rouges, 30 billes blanches et 60 billes vertes.

Pour une partie, chaque joueur doit miser 2 jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

— Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.

— Si la bille est blanche, le joueur récupère 4 jetons.

— Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est-à-dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1. a) Établir que la loi de probabilité de X est donnée par :

Valeurs a prises par X	-2	2	6
$\mathrm{P}(X = a)$	0,6	0,3	$0{,}1$

   b) Démontrer que le jeu est équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X est nulle.

   c) Calculer la variance puis l'écart-type de X. On arrondira au centième.

2. Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent modifier le jeu pour qu'il leur devienne favorable. Ils décident alors d'ajouter des billes vertes dans l'urne.

   On note n le nombre de boules ajoutées.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X puis exprimer son espérance $\mathbb{E}\left(X\right)$ en fonction de n.

   b) Combien de billes vertes doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à -1 ?