Chapitre 12
# Produit scalaire

## 12.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base

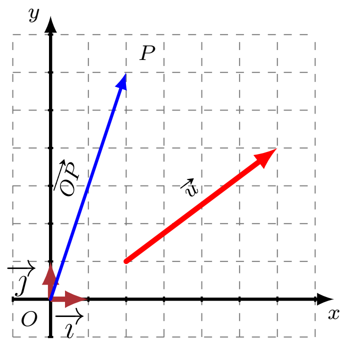
**Définition 12.1** Soit trois points non alignés $O$, $I$ et $J$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires et forment une *base*.

Si on muni le plan du repère $(O\ ;\ I\ ,\ J)$ (noté encore $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ})$ ou $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$) alors :

Tout vecteur $\vec{u}$ admet un unique couple de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la *base* $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

**Figure 12.1** – Décomposition de vecteurs dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ $\overrightarrow{OP} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$ et $\vec{u} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$




## 12.2 Norme d'un vecteur

**Définition 12.2 — Norme.**

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, et soit $A$ et $B$ deux points tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

La norme $\|\vec{u}\|$ est la longueur du segment $[AB]$ et on note $\|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

**Définition 12.3 — Repère orthonormé.**

Le repère $(O\,;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ est *orthonormé* si, en posant $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ on a :

— $(OI)$, $(OJ)$ sont perpendiculaires.

— $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$

**Théorème 12.1**

Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de l'espace muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$ *orthonormé* :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

### 12.2.1 Approche géométrique du produit scalaire

**Définition 12.4 — formule trigonométrique.**

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *non nuls*. Le produit scalaire est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

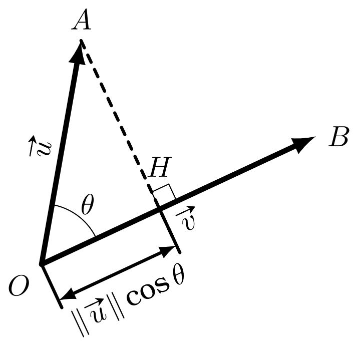
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) \qquad \text{[formule trigonometrique]}$$

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors le produit scalaire est $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

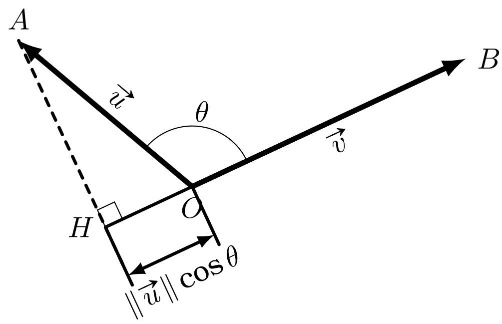
R Pour l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ on prendra des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ de même origine.

**Figure 12.2** – Si $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $(OB)$, alors $\|\vec{u}\|\cos\theta = \overline{OH}$

**(a)** $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ avec $\vec{u}\cdot\vec{v} = OH \times OB$




**(b)** $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ avec $\vec{u}\cdot\vec{v} = -OH \times OB$




■ **Exemple 12.1** Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans la figure ci-contre.

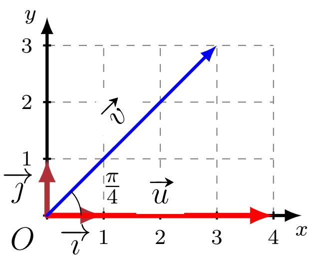
***solution.***

*Par la formule trigonométrique* Par lecture graphique $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

$\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$, et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{4} = 45°$.

$$\text{Donc } \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$= 4\times 3\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12$$




*Par la projection*

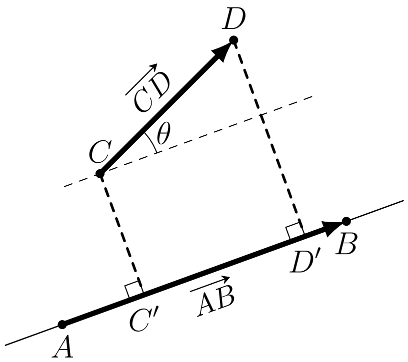
■

■ **Exemple 12.2** On peut prendre le projeté scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ le long de $\vec{v}$ même si les représentants choisis sont d'origine différentes :

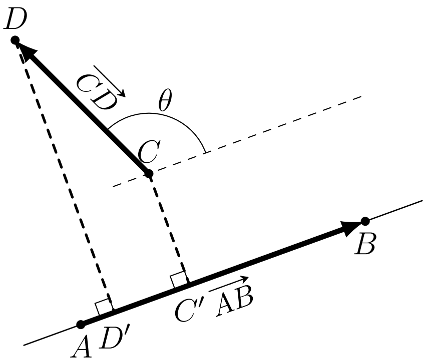
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$$

**Figure 12.3** – $C'$ et $D'$ sont les projetés orthogonaux de $C$ et $D$ perpendiculairement sur la droite $(AB)$.

**(a)** Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$ est positif si $\overrightarrow{C'D'}$ est du même sens que $\overrightarrow{AB}$.




**(b)** Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$ est négatif si $\overrightarrow{C'D'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire.




**Définition 12.5 — orthogonalité de vecteurs.**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit *orthogonaux* (notation $\vec{u} \perp \vec{v}$) si le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \begin{cases} (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2} \\ \text{ou } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

En particulier, le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs.

***Démonstration.***

$$\begin{aligned} & 0 = \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \iff & 0 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \iff & \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

■

**Corollaire 12.2 — perpendicularité de droites.**

Deux droites du plan sont *perpendiculaires* si et seulement si elles sont dirigées selon deux vecteurs *orthogonaux*.

$$(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

### 12.2.2 Propriétés du produit scalaire

**Propriétés 12.3 — admis.**

(PS1) Le produit scalaire est *symétrique* :

$$\forall \vec{u},\ \forall \vec{v} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

(PS2) Le produit scalaire est *défini positif* :

$$\forall \vec{u} \qquad \vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0 \qquad \text{avec égalité} \qquad \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

(PS3) Le produit scalaire est *bilinéaire* :

$$\forall \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \qquad \text{[distributif pour l'addition]}$$

$$(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \qquad \text{[distributivité à droite]}$$

$$\forall c \in \mathbb{R}, \qquad \vec{u}\cdot(c\vec{v}) = c(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (c\vec{u})\cdot\vec{v} \qquad \text{[multiplication par un réel]}$$

Ainsi il n'a pas d'ambiguïté dans l'écriture $c\vec{u}\cdot\vec{v}$ et on peut écrire :

$$\vec{u}\cdot(a\vec{v}+b\vec{w}) = a\vec{u}\cdot\vec{v} + b\vec{u}\cdot\vec{w}$$

■ **Exemple 12.3**

Sachant que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 5$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -1$ et $\|\vec{u}\| = 4$, déterminer $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-3\vec{u}+4\vec{w})$.

***solution.*** 
$$\begin{aligned}(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-3\vec{u}+4\vec{w}) &= -3\vec{u}\cdot\vec{u} + 4\vec{u}\cdot\vec{w} - 6\vec{v}\cdot\vec{u} + 8\vec{v}\cdot\vec{w} \\ &= -3\|\vec{u}\|^2 + 4\vec{u}\cdot\vec{w} - 6\vec{v}\cdot\vec{u} + 8\vec{v}\cdot\vec{w} \\ &= 3\times 4^2 + 4\times(-1) - 6\times 3 + 8\times 5 = -30\end{aligned}$$
■

***Démonstration.***

(PS1) $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, et la fonction cos est paire, donc $\cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \cos(\vec{v}\ ;\ \vec{u})$.

(PS2) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\|\cos(\vec{u},\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

(PS3) Illustration de la ditributivité sur la figure 12.4

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$

Illustration de la multiplication par un réel sur la figure 12.5 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot(k\overrightarrow{CD}) &= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|k\overrightarrow{CD}\|\cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ k\overrightarrow{CD}) \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|\times|k|\|\overrightarrow{CD}\|\cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CE})\end{aligned}$$

$$\text{si } k>0 = \|\overrightarrow{AB}\|\times k\|\overrightarrow{CD}\|\cos(\theta) = k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$$

$$\begin{aligned}\text{si } k<0 &= \|\overrightarrow{AB}\|\times(-k)\|\overrightarrow{CD}\|\cos(\theta+\pi) \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|\times(-k)\|\overrightarrow{CD}\|\times(-1)\cos(\theta) \\ &= k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

■

**Figure 12.4** – Cas où $\overline{AC'}$, $\overline{C'D'}$ et $\overline{AB}$ sont de même signe

**(a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{AC'}\times\overline{AB}+\overline{C'D'}\times\overline{AB}$
$= (\overline{AC'}+\overline{C'D'})\times\overline{AB}$
$= \overline{AD}\times\overline{AB}$

**(b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overline{AD}\times\overline{AB}$

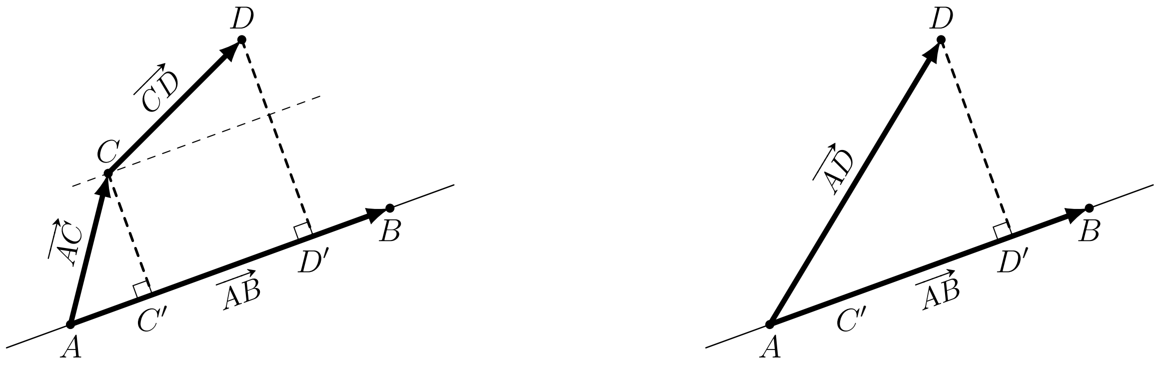
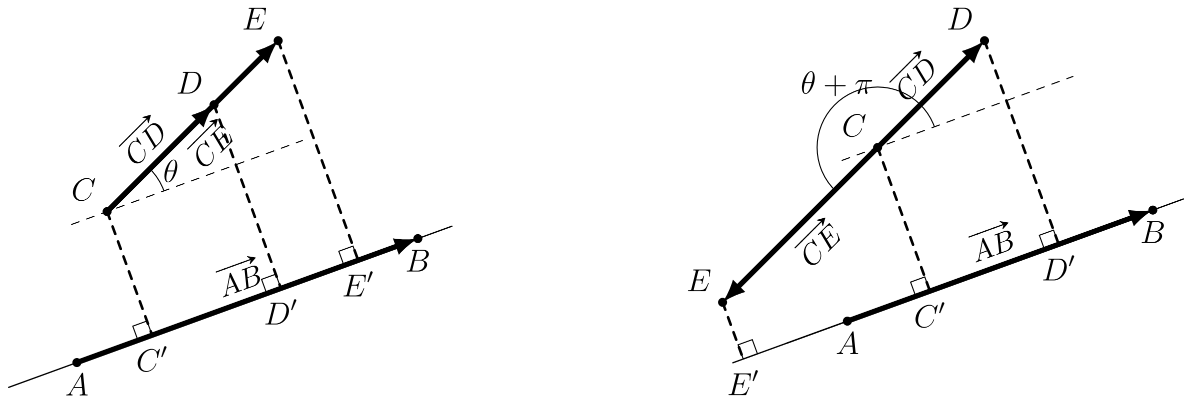



**Figure 12.5** – Illustration de l'identité $k\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}$.

**(a)** $k>0$, alors $(\overrightarrow{AB}\ ;\ k\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})=\theta$

**(b)** $k<0$ alors $(\overrightarrow{AB}\ ;\ k\overrightarrow{CD})=\theta+\pi$.




## 12.3 Approche analytique du produit scalaire

On se place dans un plan muni d'un repère *orthonormé* $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,)$ :

— Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux : $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=0$ ;

— Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont *unitaires* : $\|\vec{\imath}\|=1$ et $\|\vec{\jmath}\|=1$

**Théorème 12.4** On se place dans un repère *orthonormé* $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,)$.
Pour les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

***Démonstration.*** 
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\cdot(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}) \\ &= xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} \\ &= xx'+yy'\end{aligned}$$

*par bilnéarité (PS3)*

*$(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée* ■

■ **Exemple 12.4** Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}\binom{1}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{2}$.

***solution.*** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 1 \times 2 = 5.$ ■

■ **Exemple 12.5** Montrer que $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

***solution.*** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 2 \times \frac{3}{2} = 0.$ ■

**Propriété 12.5 — calculer un angle.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. Si $\theta = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ alors :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

■ **Exemple 12.6** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6}$. Déterminer $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

***solution.***

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\
\sqrt{6} &= 2 \times \sqrt{3} \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\
\cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ldots.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 12.7 — calculer un angle entre deux vecteurs.**

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$.
Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une mesure de l'angle $\theta = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

***solution.***

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta) \\
2(-1) + 3(0) &= \sqrt{2^2 + 3^2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2} \cos(\theta) \\
\cos(\theta) &= \frac{-2}{\sqrt{13}} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) \approx 99^\circ
\end{aligned}$$

■

### 12.3.1 Exercices

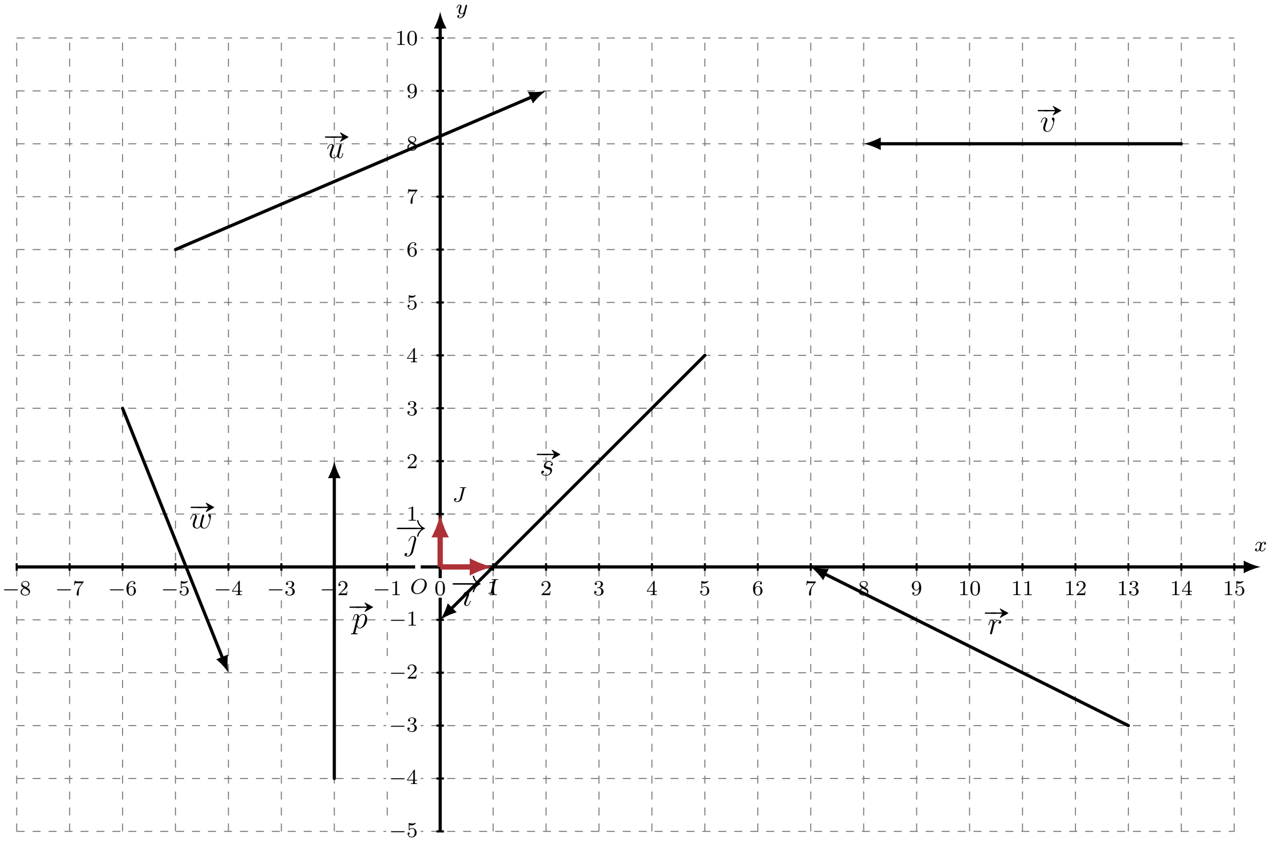
**Exercice 12.1**

1. Représenter dans le repère orthonormé les vecteurs suivants :

a) le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ d'origine $A(2\ ;\ 5)$

b) le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ d'origine $C(3\ ;\ -2)$

2. Lire les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ ; $\vec{v}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ ; $\vec{w}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ ; $\vec{p}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ ; $\vec{q}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ ; $\vec{r}\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$.




**Exercice 12.2**

Calculer les coordonnées du vecteur demandé :

1. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(2;3)$, $B(4;7)$
2. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(3;-1)$, $B(1;4)$
3. $\overrightarrow{BA}$ avec $A(2;5)$, $B(3;0)$
4. $\overrightarrow{BA}$ avec $A(0;4)$, $B(6;-1)$

### 12.3.2 Exercices : Produit scalaires, les définitions

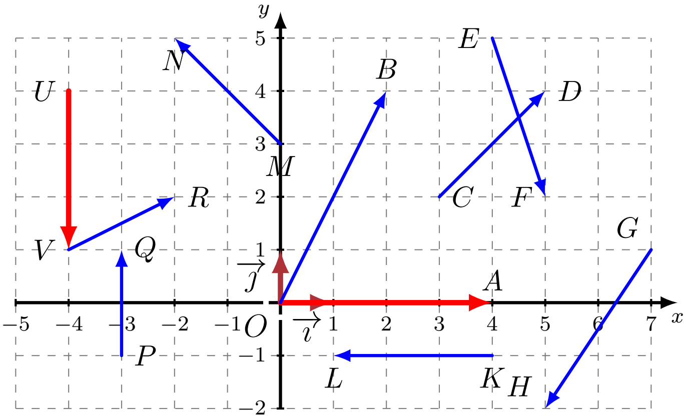
**Exercice 12.3**

À l'aide de la formule trigonométrique, déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour chaque cas :

1. $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 135°$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = -60°$.
3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 120°$.

### Exercice 12.4

À l'aide de la formule du projeté, déterminer les produits scalaires suivants :




| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \ldots\ldots\ldots$ | $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN} = \ldots\ldots$ |
| $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = \ldots\ldots\ldots$ | $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{UV} = \ldots\ldots\ldots$ |
| $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD} = \ldots\ldots\ldots$ | $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{KL} = \ldots\ldots\ldots$ |
| $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{EF} = \ldots\ldots\ldots$ | $\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{PQ} = \ldots\ldots\ldots$ |
| $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{GH} = \ldots\ldots\ldots$ | $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{PQ} = \ldots\ldots\ldots$ |

### Exercice 12.5

Dans chaque cas, utiliser les propriétés du produit scalaire pour déterminer :

1. Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -3$, $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{w}\| = 3$ alors :
   a) $(-2\vec{u})\cdot\vec{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) $(3\vec{v})\cdot\vec{v} = \ldots\,\vec{v}\cdot\vec{v} = \ldots\,\|\ldots\ldots\|^{\cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   d) $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot(2\vec{w}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   e) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$, alors :
   a) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) $2\vec{u}\cdot(-3\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

      $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -4$, alors :

   $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$, alors :

   $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Le plan est muni d'un repère *orthonormé* $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ :

**Exercice 12.6**

Calculer les produits scalaires demandés:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\binom{1}{3}$ et $\vec{v}\binom{-1}{5}$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\binom{15}{-8}$ et $\vec{v}\binom{6}{9}$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\binom{-1}{-3}$ et $\vec{v}\binom{4}{-4}$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ avec $A(5;\,6),\ B(-1;\,4),\ C(3;\,7),\ D(8;9)$

**Exercice 12.7**

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1. $\vec{u}\binom{4}{5}$ et $\vec{v}\binom{10}{-8}$.
2. $\vec{u}\binom{-2}{7}$ et $\vec{v}\binom{-14}{-4}$.
3. $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{-b}{a}$.
4. $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{3b}{-3a}$.

**Exercice 12.8**

Soit $P(3;4)$, $Q(-5;1)$, $M(7;3)$, and $N(4;11)$. Montrer que les droites $(PQ)$ et $(MN)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 12.9**

Dans chaque cas donner les valeurs possibles de $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$. Arrondir au degré près.

1. $AB = 6,\ AC = 2\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$
2. $AB = \sqrt{6},\ AC = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$
3. $AB = 1,\ AC = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$
4. $AB = 2,\ AC = \frac{1}{2}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

**Exercice 12.10 — entrainement.**

Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près dans les cas suivants.

1. $A(-3;2),\ B(3;0)$ et $C(0;6)$
2. $A(-2;2),\ B(3;1)$ et $C(-1;2)$
3. $A(1;3),\ B(0;-2)$ et $C(1;-2)$

### 12.3.3 Applications géométriques directes

■ **Exemple 12.8 — Applications aux équations cartésiennes de droites.**

La droite $D$ passant par $P(x_0, y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in D \quad &\iff \quad \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
&\iff \quad ax + by \underbrace{-ax_0 - by_0}_{c} = 0 \\
&\iff \quad ax + by + c = 0
\end{aligned}$$

On dit que $D$: $ax + by + c = 0$ est *une équation cartésienne* de la droite $D$.

**Exercice 12.11**

Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$ passant par $A(-6\ ;\ -4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

### Exercice 12.12

Soit $A(-1\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 6)$ et $C(17\ ;\ 1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$ passant par $A$ et perpendiculaire à $(BC)$.

### Exercice 12.13 — nature d'un triangle.

Soit $J(6\ ;\ 1)$, $K(2\ ;\ 4)$, $L(1\ ;\ -5)$ et $M\left(-\frac{5}{2}\ ;\ -2\right)$.

1. Le triangle $JKL$ est-il rectangle en $J$ ?
2. Montrer que $JKM$ est rectangle.

### Exercice 12.14 — nature d'un quadrilatère.

Soit $F(-2\ ;\ -3)$, $A(-8\ ;\ 4)$, $K(-29\ ;\ -14)$ et $E\,(-23\ ;\ -21)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EA}$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que les droites $(FA)$ et $(FE)$ sont perpendiculaires. Que peut-on en déduire ?

### Exercice 12.15 — entrainement.

Soit $T(-3\ ;\ 8)$, $R(8\ ;\ 0)$, $U(16\ ;\ 11)$ et $E\,(5\ ;\ 19)$.

1. Montrer que $TRUE$ est un parallélogramme.
2. Montrer que $TRUE$ est un parallélogramme rectangle.
3. Montrer que $TRUE$ est un parallélogramme carré.

### Exercice 12.16 — entrainement.

Soit $C(2\ ;\ -9)$, $H(5\ ;\ -21)$, $E(8\ ;\ -9)$ et $F\,(5\ ;\ 3)$. Montrer que $CHEF$ est un losange.

### Exercice 12.17 — révision.

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}6a\\3b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4a\\2b\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}3a\\-a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-15a\\5a\end{pmatrix}$.

### Exercice 12.18 — revision.

Soit $P(-3;1)$, $Q(6;4)$, $M(2;-2)$, and $N(5;-1)$. Montrer que $(PQ)//(MN)$.