Probabilités conditionnelles et variables aléatoires

Enseignement de Spécialité. 1reG

Propriétés d'une loi de probabilité P

$P(\varnothing)=0$; $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(\Omega)=1$; $P(\overline{A})=1-P(A)$; $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Probabilités conditionnelles

Probabilité sachant l'évènement A de l'évènement B : $P(A)\neq 0$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Cas d'équiprobabilité sur Ω : $P_A(B)=\dfrac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(A)}$

P_A est une loi de probabilité sur Ω

Probabilités composées : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

Probabilités totales avec $\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ formant une **partition** de Ω :

$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$

$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)$

Indépendance de 2 événements

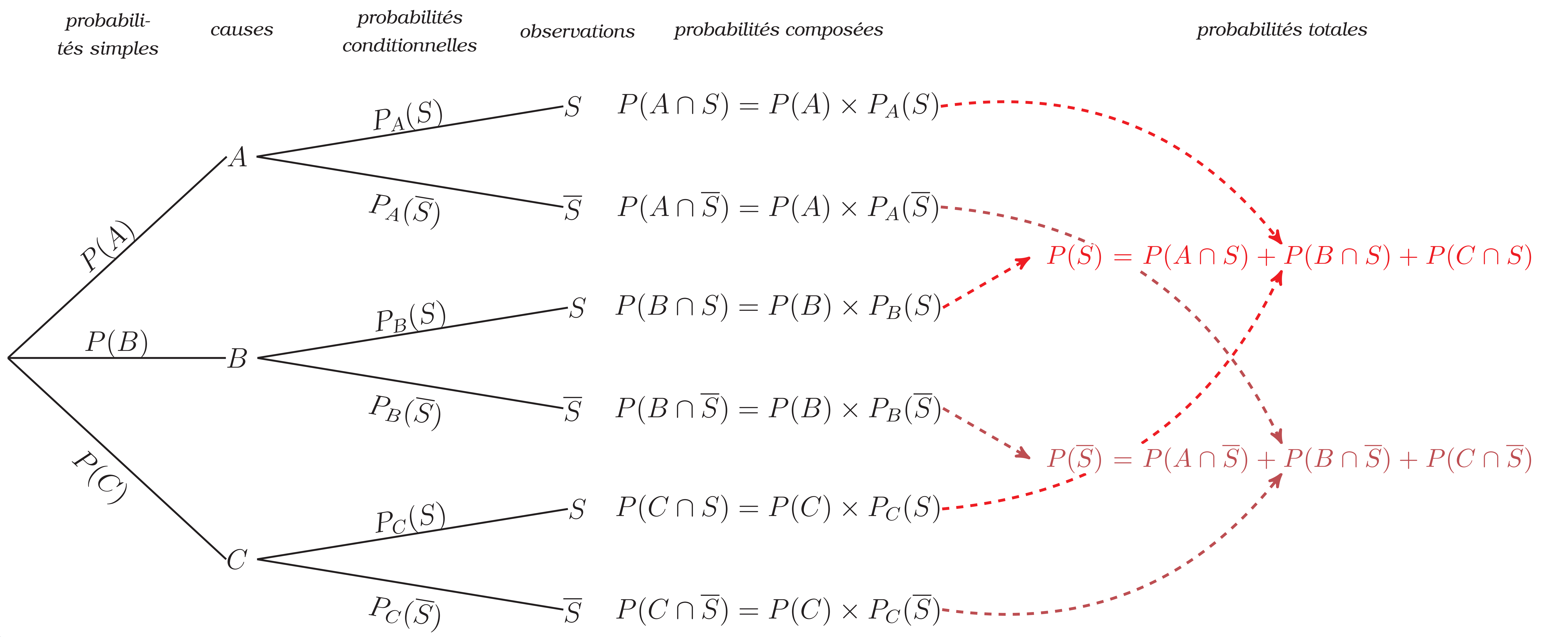
A et B indépendants

$\iff P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
$\iff P_A(B)=P(B)$
$\iff P_B(A)=P(A)$

A et B indépendants

$\iff \overline{A}$ et B indépendants
$\iff A$ et $\overline{B}$ indépendants
$\iff \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Arbre de probabilité - cas partition à 3 événements $\Omega=A\cup B\cup C$ -



Variables aléatoires et indicateurs

$X:\Omega\to\mathbb{R}$, $\omega\mapsto X(\omega)=x$ definie sur un espace de probabilité Ω. On note $\{x_1\ ;\ x_2\ ;\ldots\ ;\ x_n\}$ les valeurs prises par X.

La **loi de probabilité** de X défini pour chaque valeur x_i sa probabilité $P_X(x_i)=P(X=x_i)=P(\{X(\Omega)=x_i\})$
On a $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n)=1$.

Espérance : $\mu=E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum x_ip_i$ — indicateur de tendance centrale.

Variance : $\sigma^2=V(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2P(X=x_i)=\sum(x_i-\mu)^2p_i$ — un indicateur de dispersion.

Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i}$ — une grandeur homogène à X.