Équations, inéquations et fonctions quadratiques

Enseignement de Spécialité. 1reG

Définition et forme canonique

Une fonction quadratique est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{forme réduite}$$

Son discriminant est donné par

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On pose $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-\Delta}{4a}$. La fonction f s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \textbf{forme canonique} \\ &= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Forme factorisée, racines et signe d'un trinome

☞ Si $\Delta > 0$, alors f admet **deux racines distinctes**

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

f est factorisable sous la forme :

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2) \qquad \textbf{forme factorisée}$$

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

☞ Si $\Delta = 0$ alors f admet une **racine double** $r = \frac{-b}{2a}$

$$f(x) = a(x-r)^2$$

x	$-\infty$		r		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de a	

☞ Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas de racines et **n'est pas factorisable**.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f		signe de a	

Forme factorisée, racines et signe d'un trinome

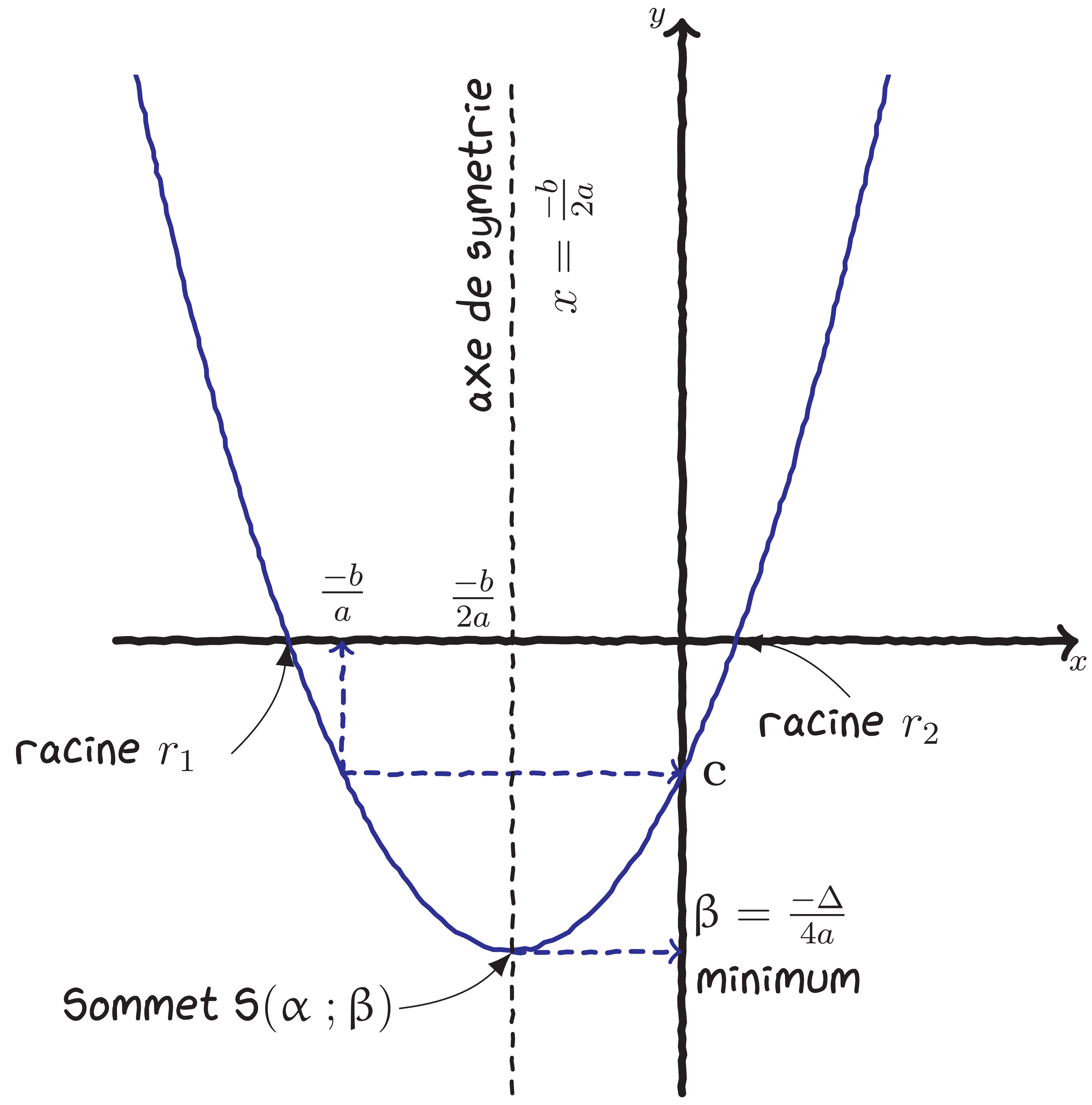
Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ est factorisable, alors

☞ la somme des racines est $r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$ $\left(\alpha = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{-b}{2a}\right)$

☞ le produit des racines est $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$.



Cette parabole est la translation de la parabole $y = ax^2$.

Sens de variation

La forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ permet de déterminer le sens de variation de f :

Si $a > 0$ alors f admet un **minimum** β atteint en α.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

Si $a < 0$ alors f admet un **maximum** β atteint en α.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$ ↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Techniques de factorisations/résolutions

☞ par regroupement $3x(2x+5)+5(2x+5) = (3x+5)(2x+5)$

☞ par différence de carrés . . . $x^2 - 5 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

☞ par carré parfait . . . . $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

☞ par produit-somme

☞ par complétion au carré

☞ par la formule quadratique