Chapitre 1
Ensembles

Table 1.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 1...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître.../savoir faire...**	🪨	💎	💍
Vocabulaire des ensembles			
définir un ensemble par extension, par compréhension	1.1,		
utiliser les symboles $\in, \ni, \notin \not\ni$ et $\subset$ et $\supset$	1.2, 1.3		
intersection $\cap$, union $\cup$, et complémentaire	1.4,	1.5, 1.12, 1.13	
exploiter et produire des diagrammes de Venn	1.6, 1.7, 1.8	1.9, 1.10, 1.11	1.14
Ensembles de nombres réels			
justifier qu'un nombre est dans $\mathbb{D}$	1.17		
justifier qu'un nombre est dans $\mathbb{Q}$	1.15,	1.18	1.19
classification des réels et généralités	1.16	1.21, 1.22	
Valeur absolue			
définition, valeur absolue comme écart	1.23, 1.24	1.25	
Club de maths : puzzles de logique			

1.1 Vocabulaire des ensembles

■ **Exemple 1.1** Les ensembles de la figure 1.1 s'écrivent : $A = \{43; 0; 7; 188\}$, $B = \{7; 4; 82\}$.

L'ordre d'écriture des éléments entre accolades n'est pas important : $\{43; 0; 7; 188\} = \{7; 43; 188; 0\}$.

7 est un élément, $\{7\}$ est un ensemble.

43; 0; 7 et 188 sont les *éléments* de l'ensemble A.

$43 \in A$ se lit « 43 *appartient* à A ».

$82 \notin A$ se lit « 82 *n'appartient pas* à A ».

Tout élément de l'ensemble $D = \{188; 0; 43\}$ *appartient* à A.

On dira que $D \subset A$ (*inclus*) ou $A \supset D$ (*contient*).

$B \not\subset A$. B n'est pas un sous-ensemble de A.

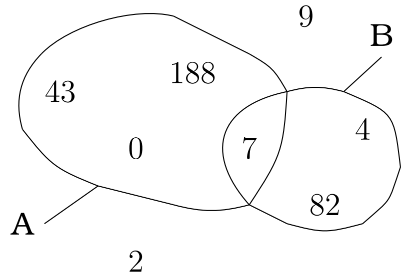


Figure 1.1 – Diagramme des ensembles A et B

R Les éléments d'un ensemble sont distincts deux-à-deux. Il n'est pas correct d'écrire $\{0; 5; 0\}$.

1.2 Ensembles particuliers

Définition 1.1 — $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Définition 1.2 — $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs . $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

R $\mathbb{Z}$ est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Définition 1.3 — nombres décimaux. L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme du produit d'une puissance de 10 par un entier non divisible par 10 sont dit décimaux.

$$\mathbb{D} = \left\{ b \times 10^n \quad \middle| \quad b \in \mathbb{Z} \quad \text{non divisible par 10 et } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

■ **Exemple 1.2** Tout nombre décimal admet :

— une *écriture scientifique* $\pm a \times 10^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ et la mantisse $a \in \mathbb{D}$ vérifie $1 \leqslant a < 10$.

— un *ordre de grandeur* égal au produit de l'entier le plus proche de a par 10^n.

— une *écriture décimale finie*

x	**justification $x \in \mathbb{D}$ au sens de la définition 1.3**	**écriture scientifique**	**ordre de grandeur**
26 500	265×10^2	$2{,}65 \times 10^4$	3×10^4
42,5	425×10^{-1}	$4{,}25 \times 10^1$	4×10^1
0,001 65			
$\frac{3}{5}$ =0,6			

R Il est imprécis de caractériser les nombres décimaux comme « les nombres à virgule ». 1 et $\frac{2}{5} \in \mathbb{D}$ mais il n'y a pas de virgule dans 1 ni $\frac{2}{5}$. De plus il ne faut pas confondre *écriture décimale* et *nombre décimal*.

Les nombres dont l'écriture décimale est infinie ne seront pas dans $\mathbb{D}$, en particulier :

Proposition 1.1 — admis provisoirement. $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,3\ldots$ n'est pas un nombre décimal $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Définition 1.4 — nombres rationnels. L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme une fraction irréductible d'entiers sont dit rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \middle| \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*, \quad \text{sans diviseurs communs} \right\}$$

■ **Exemple 1.3** Parmi les nombres rationnels on compte

1. les nombres décimaux $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ ayant une écriture décimale finie
2. les rationnels non décimaux $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$ ayant une écriture décimale infinie et *périodique*.

x	**justification de $x \in \mathbb{Q}$**	**écriture décimale**	**classification**
-13	$-13 = \frac{-13}{1}$ irréductible.	-13 (finie)	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
9,75	$9{,}75 = \frac{975}{100} =$	9,75 (finie)	$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
$\frac{251}{25}$		$251 \div 25 =$ 10,04 (finie)	$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
$\frac{150}{7}$		$150 \div 7 =$ 21,$\underline{428571}\ldots$ (périodique)	$\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$

R La période d'un nombre rationel non décimal $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$ peut ne pas être constatée sur la valeur approchée donnée par la calculatrice :

$\frac{1}{19} = 1 \div 19 =$ 0,$\underline{052631578947368421}\ldots$ période = 18

$\frac{1}{47} = 1 \div 47 =$ 0,$\underline{0212765957446808510638297872340425531914893617}\ldots$ période = 46

R La constante de Champernowne est le nombre dont l'écriture décimale après la virgule énumère la suite croissante des entiers naturels :

$$C_{10} = 0,123456789101112131415161718\ldots$$

Il n'est pas rationnel : son écriture décimale est infinie et non périodique.

Définition 1.5 — $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels. est l'ensemble des nombres que nous connaissons.

Définition 1.6 Les nombres réels mais pas rationnels $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ sont dit *irrationnels*.

Proposition 1.2 — admis provisoirement. $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

■ **Exemple 1.4** Il n'est pas trivial de justifier que des nombres réels comme π ou $\sqrt{5}$ sont irrationnels. Néanmoins, on peut *supposer* qu'un nombre est irrationnel lorsque son écriture décimale *semble infinie et non périodique* (explorer l'écriture décimale de π).

> $\mathbb{N}$ nombres entiers positifs
>
> $\mathbb{Z}$ nombres entiers positifs ou négatifs
>
> $\mathbb{D}$ nombre décimaux, s'écrivent comme fraction décimale, écriture décimale finie.
>
> $\mathbb{D} \cap \overline{\mathbb{Z}}$ nombres décimaux non entiers.
>
> $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$ rationnels et non décimaux : s'écrivent comme fraction d'entiers, leur écriture décimale est infinie et périodique.
>
> $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ des nomres irrationnels.

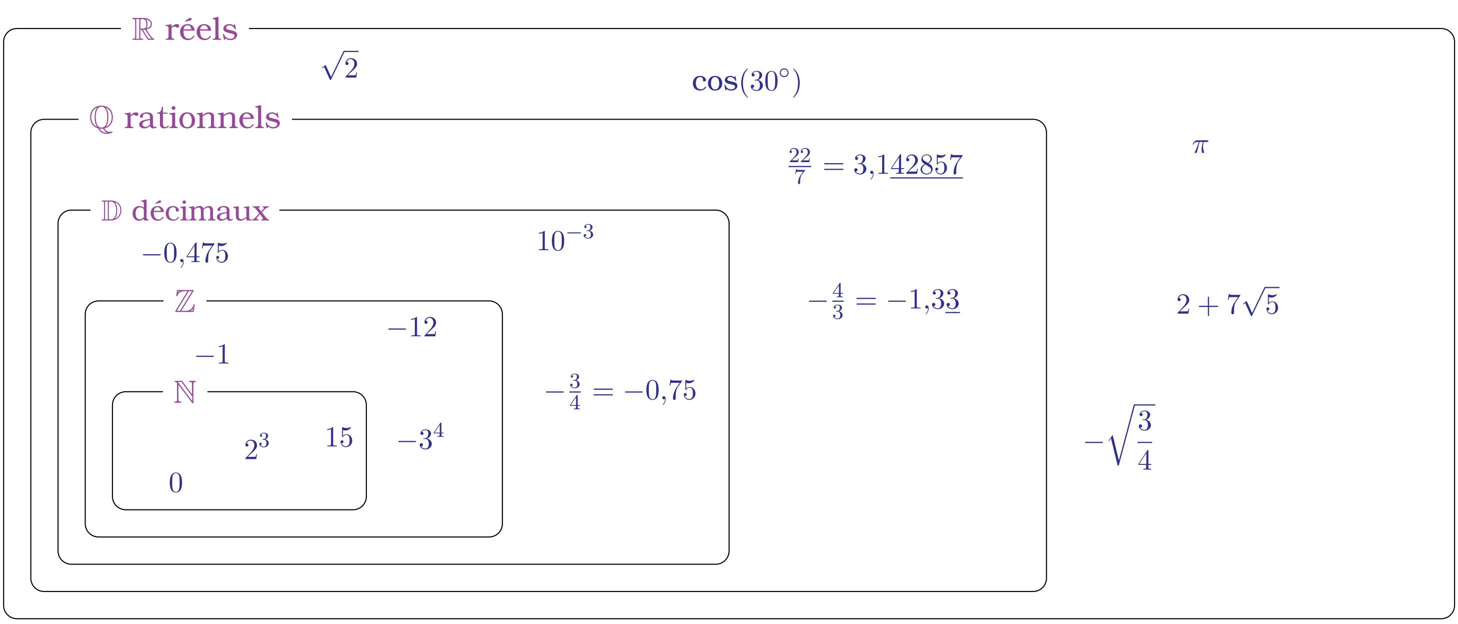


Figure 1.2 – $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

■ **Exemple 1.5** $\mathbb{R}$ être représenté par une droite graduée (figure 1.3).

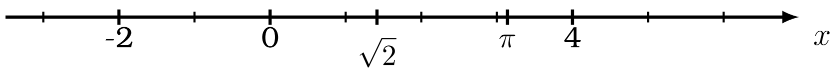


Figure 1.3 – Chaque nombre réel $x \in \mathbb{R}$ correspond à un unique point $M(x)$ de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé *abscisse* de ce point.

R Comme pour $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}^*$, on pose $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De manière générale, on peut écrire $\mathbb{R} \setminus \{-2; 4; 5\}$ pour désigner l'ensemble des nombres réels autre que -2, 4 et 5.

1.3 Valeur absolue et écart entre réels

Définition 1.7 Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue* de a est la distance qui sépare le point d'abscisse a de l'origine d'abscisse 0 sur la droite graduée. On la note $|a|$:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Utilisation : L'écart entre deux réels a et $b \in \mathbb{R}$ est donnée par $|a-b| = |b-a|$.

■ Exemple 1.6

1. $|-5| =$ .... $|15,2| =$ .... $|2-5| =$ ....
2. $\left|-10^2\right| =$ .... $\left|10^2\right| =$ .... $\left|10^{-2}\right| =$ ....
3. $\left|\dfrac{2}{-3}\right| =$ .... $\left|\sqrt{2}-1\right| =$ .... $\left|\sqrt{2}-10\right| =$ ....

■ Exemple 1.7

1. Deux nombres opposés sont à égales distances de 0, ils ont la même valeur absolue : $|a| = |-a|$.
2. L'écart entre 5 et 2 est $|5-2| = |2-5| = 3$.
3. L'écart entre 4 et -2 est $|4-(-2)| = |4+2| = |6| = 6$.
4. $|x-5| = 1$ signifie « l'écart entre x et 5 est 1 ».
   On a $x = 6$ ou $x = 4$.
5. $|x-1| < 0{,}1$ signifie « l'écart entre x et 1 est inférieur à 0,1 ». On peut dire que $0{,}9 < x < 1{,}1$.
6. Vrai ou Faux ? $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant 2 \times 10^{-3}$.

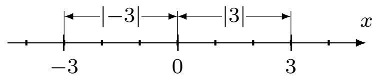


Figure 1.4 – $|-3| = |3| = 3$

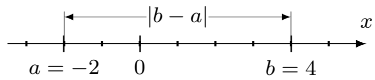


Figure 1.5 – L'écart entre 4 et -2.

■ Exemple 1.8 — Point Python.

Tester une égalité entre nombres flottants produit des résultats suprenants :

```
>>> 1/10 == 0.1
True
```

```
>>> 3.0 - 2.7 == 0.3
False
```

Nous constatons que le résultat de l'opération `3.0-2.7` n'est pas exactement `0.3`. En effet certaines valeurs de type `float` ne peuvent être qu'approchées :

```
>>> f'{0.3:.20f}'
'0.29999999999999998890'
```

```
>>> f'{3.0 - 2.7:.20f}'
'0.29999999999999982236'
```

Il est préférable de vérifier que l'écart entre deux nombres flottants est suffisamment petite :

```
>>> erreur = 0.000001 # erreur tolérée
>>> var = 3.0 - 2.7
```

```
>>> abs(var - 0.3) < erreur
True
```

1.4 Exercices

1.4.1 Exercices : diagrammes de Venn et opérations sur les ensembles

■ **Exemple 1.9**

- L'ensemble des diviseurs de 6 s'écrit $\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$.
- L'ensemble des entiers pairs positifs inférieurs ou égal à 10 s'écrit $\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$

Exercice 1.1

Écrire les ensembles décrits :

1. Les entiers positifs impairs inférieurs ou égaux à 10 ....
2. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 10 ....
3. Les solutions de l'équation $(x-1)(x+2)=0$ ....

■ **Exemple 1.10 — définition par compréhension sous la forme { éléments | condition }.**

- $\{x|x>0\}$ est l'ensemble des nombres strictement positifs. On peut dire que $5 \in \{x|x>0\}$.
- $\{x|x^2=4\} = \{-2;\ 2\}$. On peut dire que $-2 \in \{x|x^2=4\}$
- $\{2n|0 \leqslant n \leqslant 3\} = \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$

> Les symboles $\in$ et $\notin$ précisent si un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble.

Exercice 1.2

Compléter par $\in$ $\notin$. Si $A = \{x|x$ diviseur de $12\}$ et $B = \{x|x$ impair positif$\}$ alors :

1. $5 \ldots A$
2. $6 \ldots A$
3. $4 \ldots A$
4. $5 \ldots B$
5. $-1 \ldots B$
6. $6 \ldots B$

> On écrit $A \subset B$ ou $B \supset A$ lorsque « pour tout $x \in A$ on a $x \in B$ ».

■ **Exemple 1.11**

- $\{4;\ 1\} \subset \{1;\ 2;\ 4\}$
- $\{x|x$ multiple de $3\} \supset \{x|x$ multiple de $6\}$
- L'ensemble vide $\varnothing$ est inclus dans tout ensemble

Exercice 1.3

Quels ensembles sont inclus dans $\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$?

(A) $\{1;\ 2;\ 3\}$

(B) $\{1;\ 2;\ 4\}$

(C) $\{3\}$

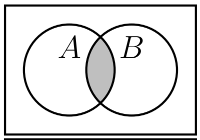
(D) $\varnothing$

(E) $\{x|x$ diviseur de $3\}$

(F) $\{x|x$ diviseur de $6\}$

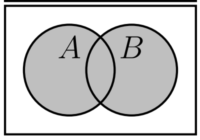
L'ensemble noté « $A \cap B$ » désigne *intersection* des ensembles A et B.

C'est l'ensemble des éléments appartenants à A **ET** appartenants à B.



L'ensemble noté « $A \cup B$ » désigne l'*union* des ensembles A et B.

C'est l'ensemble des éléments appartenants à A **OU** appartenants à B.



■ **Exemple 1.12**

1. Si $A = \{x|x$ diviseur de $8\} = \{1;\ 2;\ 4;\ 8\}$ et $B = \{x|x$ diviseur de $12\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$

   alors : $A \cap B = \{1;\ 2;\ 4\}$ et $A \cup B = \{1;\ 2\ ;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12\}$
2. $\{1;\ 2;\ 3;\ 6\} \cap \{1;\ 2;\ 4;\ 8\} = \{1;\ 2\}$ et $\{1;\ 2;\ 3;\ 6\} \cup \{1;\ 2;\ 4;\ 8\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8\}$

Exercice 1.4

1. Donner les intersections dans chaque cas :

$\{1;\ 2;\ 3;\ 4\} \cap \{2;\ 4;\ 6\} =$	$\{8;\ 4;\ 2\} \cap \{1;\ 2;\ 4\} =$ ....
$\{1;\ 2;\ 4;\ 8\} \cap \{1;\ 3;\ 9\} =$	$\{2;\ 4;\ 6\} \cap \{1;\ 3;\ 5\} =$ ....
$\{1;\ 2;\ 3;\ 6\} \cap \{2;\ 3\} =$	$\{x|1 < x\} \cap \{x|x \leqslant 2\} =$ ....

2. Donner les unions dans chaque cas :

   $\{3;\ 2;\ 1\} \cup \{1;\ 2;\ 4;\ 8\} =$ ....

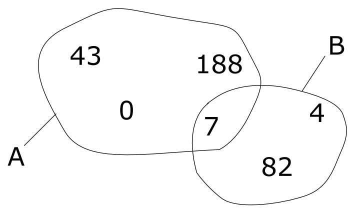
   $\{1;\ 3;\ 9\} \cup \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\} =$ ....

   $\{x|0 < x < 2\} \cup \{x|1 < x\} =$ ....

Exercice 1.5

Compléter à l'aide de $\in$, $\ni$, $\notin$, $\not\ni$, $\subset$, $\supset$:

7 .... A	$\{43; 7; 188\}$ .... A	$\{7\}$ .... B
B 0	A 4	B 43
43 .... A	7 .... B	B .... $\{4; 7\}$



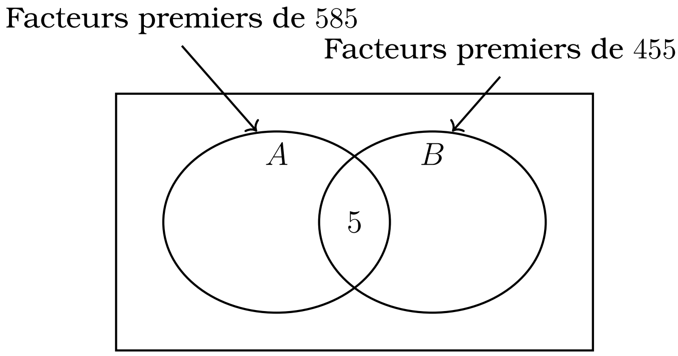
Les diagrammes de Venn nous permettent de représenter des ensembles ainsi que leurs éléments. L'univers noté Ω est l'ensemble de tous les éléments.

Exercice 1.6

Décomposer en facteurs premiers 585 et 455 puis compléter le diagramme de Venn :

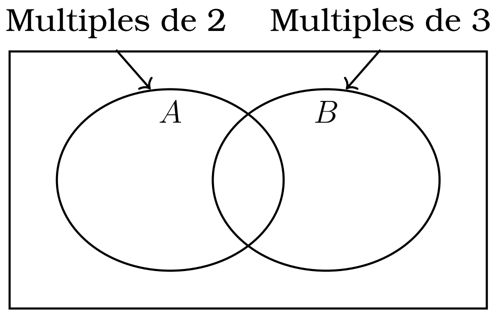
$A \cap B =$ ....

$A \cup B =$ ....



Exercice 1.7

Placer les éléments 750, 754, 755, 756, 758, 759 et 760 dans le diagramme de Venn et déterminer les ensembles :



$A =$ ....

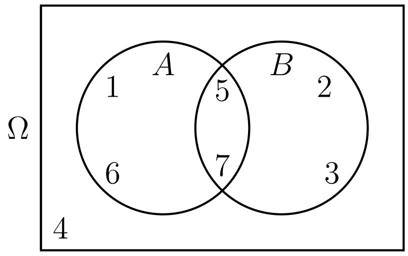
$B =$ ....

$A \cap B =$ ....

$A \cup B =$ ....

Exercice 1.8

Complète les ensembles suivants à partir du diagramme de Venn.



$A =$ ....

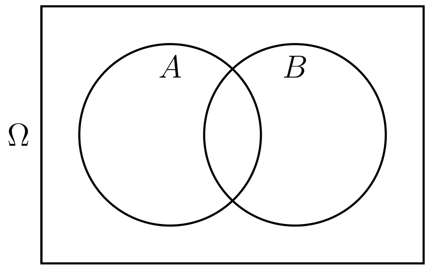
$B =$ ....

$A \cap B =$ ....

$A \cup B =$ ....

Exercice 1.9

Placer les nombres dans la bonne partie du diagramme de Venn



$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

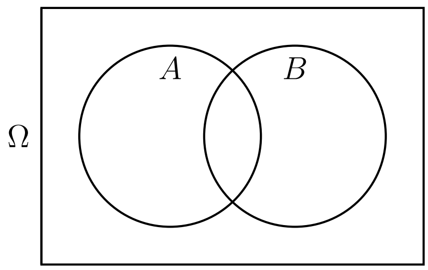
$A =$ les nombres sont premiers

$B =$ les nombres sont pairs

$A \cap B =$ .... $A \cup B =$ ....

Exercice 1.10

Placer les nombres dans la bonne partie du diagramme de Venn



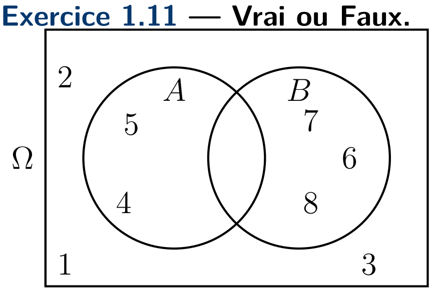
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$A =$ les nombres sont des carrés parfaits

$B =$ les nombres sont impairs

$A \cap B =$ .... $A \cup B =$ ....

Exercice 1.11 — Vrai ou Faux.

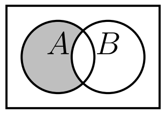


	Vrai	Faux
1/ $4 \in A$	☐	☐
2/ $5 \in B$	☐	☐
3/ $6 \in A \cup B$	☐	☐

	Vrai	Faux
1/ $A \cap B \supset \{5;\ 6\}$	☐	☐
2/ $\{5;\ 8\} \subset A \cup B$	☐	☐
3/ $A \cap B = \emptyset$	☐	☐

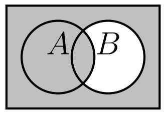
$\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω. C'est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple 1.13



« $A \cap \overline{B}$ » est l'ensemble des éléments qui sont dans A et pas dans B.

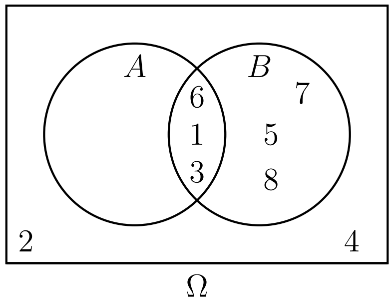
Exemple 1.14



« $A \cup \overline{B}$ » est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou ne sont pas dans B.

Exercice 1.12

Complète les ensembles suivants à partir du diagramme de Venn.



$\overline{A} =$ ....

$\overline{B} = \{$ ....

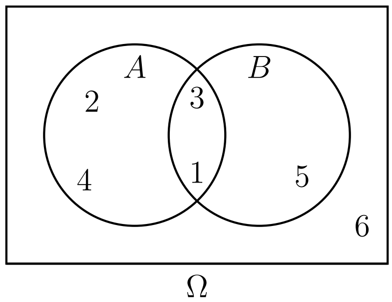
$A \cap \overline{B} =$ ....

$\overline{A} \cap B =$ ....

$\overline{A} \cap \overline{B} =$ ....

Exercice 1.13

Complète les ensembles suivants à partir du diagramme de Venn.



$\overline{A} =$ ....

$A \cup \overline{B} =$ ....

$\overline{A} \cup B =$ ....

$\overline{A} \cup \overline{B} =$ ....

$\overline{A \cap B} = \{$

Exercice 1.14 — raisonner.

Complète le diagramme de Venn à l'aide des informations suivantes :

$\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 20\}$

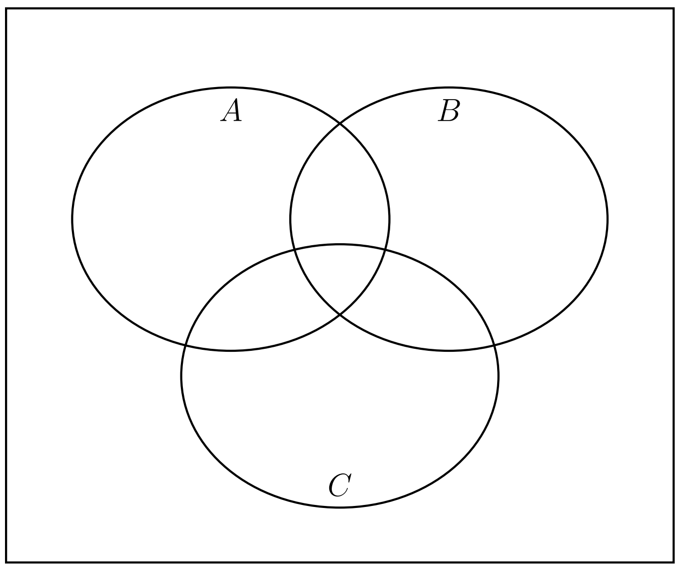
$A = \{3; 5; 7; 9\}$

$B = \{0; 4; 6\}$

$\overline{C} = \{1; 3; 4; 6; 9; 20\}$

$A \cap C = \{5; 7\}$

$A \cap B = \emptyset$



1.4.2 Exercices : réels, classification et opérations

■ **Exemple 1.15 — Organiser un calcul.** avec des fractions :

— On simplifie des **facteurs communs** : $\dfrac{5+3}{5+7} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{4\times 2}{4\times 3} = \dfrac{2}{3}$

— On multiplie deux fractions en multipliant les numérateurs et les dénominateurs :
$\dfrac{9}{4} \times \dfrac{10}{21} = \dfrac{9\times 10}{4\times 21} = \dfrac{90}{84} = \dfrac{30}{28}$

— On ajoute deux fractions en ramenant au même dénominateur :
$\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{3\times 7}{4\times 7} - \dfrac{2\times 4}{7\times 4} = \dfrac{21-8}{28} = \dfrac{13}{28}$

— En l'absence de parenthèses, attention aux priorités :
$\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{19}{15}$

Exercice 1.15 — .

Simplifier en montrant les étapes chaque expression sous forme d'une fraction irréductible :

1. $\dfrac{91}{21}$
2. $\dfrac{3}{2} \times 13$
3. $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{6}$
4. $\dfrac{7}{4} + \dfrac{2}{5}$
5. $\dfrac{5}{4} + \dfrac{13}{12}$
6. $5 - \dfrac{4}{9}$
7. $\dfrac{1}{32} - \dfrac{3}{4}$
8. $\dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{5}$

Exercice 1.16

Compléter par $\in$, $\notin$ et $\ni$:

1. $245 \dots \mathbb{N}$
2. $-3^2 \dots \mathbb{N}$
3. $\frac{3}{15} \dots \mathbb{N}$
4. $\frac{15}{3} \dots \mathbb{Z}$
5. $0 \dots \mathbb{N}^*$
6. $-5 \dots \mathbb{Z}$
7. $4{,}3 \dots \mathbb{Q} \cap \mathbb{D}$
8. $\dfrac{-12}{7} \dots \mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$

Exercice 1.17

Pour chaque nombre x, justifier l'appartenance à $\mathbb{D}$ et donner l'écriture scientifique et l'ordre de grandeur.

x	**justification $x \in \mathbb{D}$ au sens de la définition 1.3**	**écriture scientifique**	**ordre de grandeur**
$0{,}042\ 5$			
$470{,}84$			
$637{,}8$			
$97{,}65$			
$0{,}001\ 52$			
$10{,}42$			
$0{,}948\ 7$			
$\frac{7}{2{,}5} = 2{,}8$			

Exercice 1.18 Simplifier les expressions pour justifier l'appartenance à $\mathbb{Q}$. Préciser le plus petit ensemble auquel chacune appartient

x	**justification de** $x \in \mathbb{Q}$	**écriture décimale**	**classification**
$\dfrac{3\pi}{5\pi} =$	$\frac{3}{5}$ fraction irréductible	$3 \div\ 5 =$ 0,6 (finie)	$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
$\dfrac{1}{9}$	fraction irréductible	$1 \div\ 9 =$ 0,$\underline{1}$... (périodique)	$\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$
10^{-1}			
7^{-1}			
$\dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{4} =$	$\dfrac{5+7}{4} =$		
$5 - \dfrac{4}{9}$			
$\dfrac{12}{5} \times \dfrac{1}{9}$			
$\dfrac{5}{4} + \dfrac{13}{12} =$	$\dfrac{5\times}{4\times} + \dfrac{13}{12} =$		
$\dfrac{8}{3} - \dfrac{11}{12}$			
$\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{12}$			

■ **Exemple 1.16 — Exprimer comme fraction irréductible un réel donné par son écriture décimale périodique.**

$a = 0,\underline{7} = 0{,}777\ldots = \dfrac{7}{9}$

$b = 0,\underline{32} = 0{,}323\ 232\ldots = \dfrac{32}{99}$

$c = 0,\underline{371} = 0{,}371\ 371\ 371\ldots = \dfrac{371}{999}$

$$\begin{aligned} d &= 1,4\underline{32} = 1{,}432\ 323\ 2\ldots \\ &= 1,4 + 0{,}032\ 323\ 2\ldots \\ &= 1,4 + \frac{1}{10} \times \frac{32}{99} = \frac{709}{495} \end{aligned}$$

Exercice 1.19 Exprimer comme fraction irréductible les réels suivants :

1. $0,\underline{45} = 0{,}454\ 545\ldots$
2. $0,\underline{5} = 0{,}555\ldots$
3. $0,\underline{14} = 0{,}141\ 414\ldots$
4. $0,\underline{152} = 0{,}152\ 152\ 152\ldots$
5. $5,\underline{41} = 5{,}414\ 141\ldots$
6. $1,2\underline{76} = 1{,}276\ 767\ 6\ldots$

Définition 1.8 Si $a \leqslant x \leqslant b$ avec a et $b \in \mathbb{D}$ et $b - a = 10^{-n}$ alors $a \leqslant x \leqslant b$ est un encadrement décimal à 10^{-n} près du réel x.

■ **Exemple 1.17** $\pi \approx 3.1416$; $3{,}141 \leqslant \pi \leqslant 3{,}142$ est un encadrement décimal à $3,142 - 3,141 = 0,001 = 10^{-3}$ près.

Exercice 1.20 À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement décimal à la précision demandée :

1. π à 10^{-5} près | 2. $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près | 3. $\frac{22}{7}$ à 10^{-2} près | 4. $\cos(35°)$ à 10^{-3} près

Exercice 1.21 Cochez les cases auxquels chaque nombre appartient :

	N	Z	D	Q	R
1/ 2,25	☐	☐	☐	☐	☐
2/ $\frac{19}{25}$	☐	☐	☐	☐	☐
3/ $-\frac{4}{3}$	☐	☐	☐	☐	☐
4/ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$	☐	☐	☐	☐	☐
5/ $\dfrac{6-(-5)+1}{(-8)/2}$	☐	☐	☐	☐	☐
6/ $1+2\sqrt{3}$	☐	☐	☐	☐	☐
7/ $\sqrt{25}-2\sqrt{4}$	☐	☐	☐	☐	☐
8/ $3-\sqrt{-4+5\times 8}$	☐	☐	☐	☐	☐
9/ $2{,}3\times 10^{-12}$	☐	☐	☐	☐	☐
10/ $\frac{\sqrt{10}}{100}$	☐	☐	☐	☐	☐
11/ $\frac{15\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$	☐	☐	☐	☐	☐
12/ $\left(\sqrt{5}\right)^2$	☐	☐	☐	☐	☐

Exercice 1.22 — Vrai ou Faux ?.

Si faux, donner un contre-exemple à l'aide de l'exercice 1.21.

	Vrai	Faux
1/ Un nombre décimal ne peut jamais être un nombre entier.	☐	☐
2/ Un nombre décimal est toujours un rationnel.	☐	☐
3/ Un nombre irrationnel peut être un entier.	☐	☐
4/ Un nombre entier relatif est toujours un décimal.	☐	☐
5/ Le produit de deux nombres décimaux est toujours un décimal.	☐	☐
6/ Le quotient de deux nombres décimaux est toujours un décimal.	☐	☐
7/ Le quotient de deux nombres décimaux peut être un décimal.	☐	☐
8/ Le produit de deux nombres rationnels est toujours un rationnel.	☐	☐
9/ Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un irrationnel.	☐	☐
10/ Le quotient de deux nombres irrationnels peut être un entier.	☐	☐

1.4.3 Exercices : valeur absolue

■ **Exemple 1.18** Simplifier les expressions suivantes

$$\begin{aligned} A &= |3-10| \\ &= |-7| \\ &= -(-7) \quad -7<0 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= |3(-6)| \\ &= |-18| \\ &= -(-18) \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 3|-1+\sqrt{2}| \\ &= 3|\sqrt{2}-1| \\ &= 3(\sqrt{2}-1) \quad \sqrt{2}-1>0 \\ &= 3\sqrt{2}-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 3|-5+\sqrt{10}| \\ &= 3|\sqrt{10}-5| \\ &= 3(-1)(\sqrt{10}-5) \quad \sqrt{10}-5<0 \\ &= 3(5-\sqrt{10}) \end{aligned}$$

Exercice 1.23 — À vous. Simplifier les expressions suivantes :

$|4-15| =$ ....

$-3|6-12| =$ ....

$|(-7)(-4)| =$ ....

$|15+26| =$ ....

$7|3(-4)| =$ ....

$-|15-46| =$ ....

$|3(-4)|+|2(-18)| =$ ....

$-3|26-12| =$ ....

$|5-4|-|-6| =$ ....

$|3|+2|-10| =$ ....

$|-2+(-4\times 2)| =$ ....

$-2|1+4| =$ ....

$||-6|-|-4|| =$ ....

$\dfrac{-1}{|-1|} =$ ....

$-1-|1-|-1|| =$ ....

$\left|\dfrac{7-12}{12-7}\right| =$ ....

$\left|\sqrt{5}-5\right| =$ ....

$|10-\pi| =$ ....

Exercice 1.24 — Vrai ou faux ?.

	Vrai	Faux
1/ $\|-5\| = 5$	☐	☐
2/ $\|8\| = 8$	☐	☐
3/ $\|3-5\| = -2$	☐	☐
4/ $\|-7-5\| = 2$	☐	☐
5/ $\|3-5\| = \|3+5\|$	☐	☐
6/ $\|3-5\| = \|-5-3\|$	☐	☐
7/ $\|7-5\| = \|5-7\|$	☐	☐
8/ $\|-7-5\| = \|7+5\|$	☐	☐
9/ $\left\|\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right\| = \frac{1}{3}$	☐	☐
10/ $\left\|\frac{-4}{7}\right\| = \frac{4}{7}$	☐	☐

	Vrai	Faux
1/ $\left\|-\sqrt{2}\right\| = 1{,}414\,213$	☐	☐
2/ $\|\pi-3\| = \pi-3$	☐	☐
3/ $\left\|\sqrt{3}-1\right\| = -(1-\sqrt{3})$	☐	☐
4/ $\left\|\sqrt{3}-2\right\| = -(2-\sqrt{3})$	☐	☐
5/ $\left\|\sqrt{5}-2\right\| = 1-\sqrt{5}$	☐	☐
6/ $\left\|10^5\right\| = 10^5$	☐	☐
7/ $\left\|10^{-3}\right\| = 10^3$	☐	☐
8/ $\left\|-10^{-3}\right\| = 10^3$	☐	☐
9/ $\left\|10^3-10^4\right\| = 10^3+10^4$	☐	☐
10/ $\left\|10^3-10^{-4}\right\| = 10^3-10^{-4}$	☐	☐

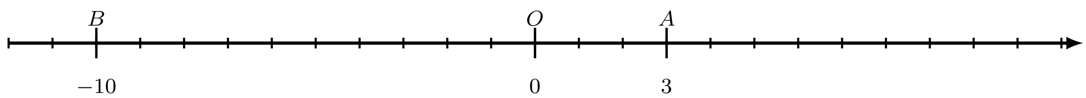
Exercice 1.25 — valeur absolue pour mesurer l'écart.

Entourer les égalités qui correspondent à l'énoncé. Plusieurs réponses sont possibles.

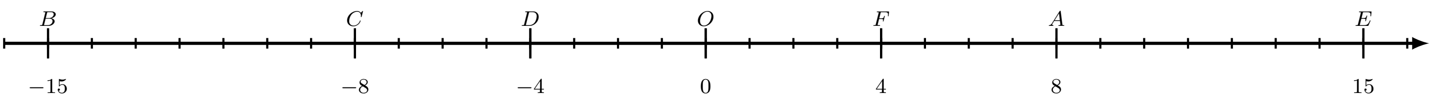
1/ L'écart entre 3 et 2 vaut...	$\lvert 2-3\rvert$	$\lvert 3-2\rvert$	$\lvert 3+2\rvert$
2/ L'écart entre 3 et -2 vaut...	$\lvert -2-3\rvert$	$\lvert 3-2\rvert$	$\lvert 3+2\rvert$
3/ L'écart entre -2 et -5 vaut...	$\lvert -2-5\rvert$	$\lvert -2+5\rvert$	$\lvert -5+2\rvert$
4/ L'écart entre x et 5 vaut ...	$\lvert -x+5\rvert$	$\lvert x-5\rvert$	$\lvert x+5\rvert$
5/ L'écart entre x et -1 vaut ...	$\lvert -x-1\rvert$	$\lvert x-1\rvert$	$\lvert x+1\rvert$
6/ L'écart entre x et 3 vaut 1	$\lvert x+3\rvert=1$	$\lvert x-3\rvert=1$	$\lvert -x+3\rvert=1$
7/ L'écart entre x et -2 vaut 1	$\lvert x+2\rvert=1$	$\lvert x-2\rvert=1$	$\lvert x+1\rvert=-2$

Exercice 1.26

1. Soit le point M d'abscisse x sur la droite graduée d'origine O ci-dessous. Donner l'expression des distances MA et BM à l'aide d'une valeur absolue :



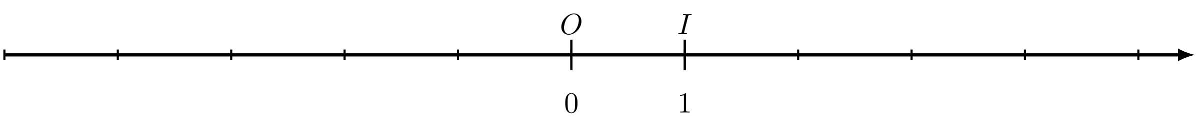
2. Soit le point M d'abscisse x sur la droite graduée d'origine O ci-dessous. Associer les valeurs



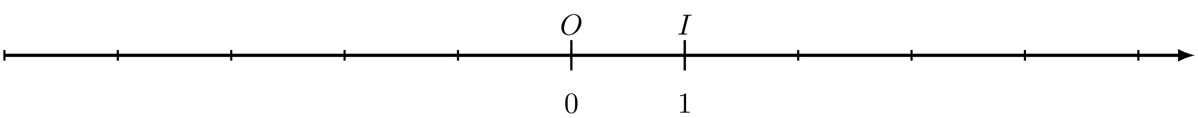
absolues aux distances auxquelles elles correspondent :

MD $\quad ME$ $\quad CM$	$\lvert -x-15\rvert$ $\quad \lvert -x+4\rvert$ $\quad \lvert 8-x\rvert$
AM $\quad MB$ $\quad MF$	$\lvert -8-x\rvert$ $\quad \lvert -15+x\rvert$ $\quad \lvert -4-x\rvert$

3. Colorier les points de la droite graduée pour lequels l'abscisse x vérifie $\lvert x-3.5\rvert \leqslant 1$:



Colorier les points de la droite graduée pour lequels l'abscisse x vérifie $\lvert x+2\rvert \geqslant 1.5$:



1.5 Compléments

Axiome 1.3 — Principe des tiroirs. Si n chaussettes sont rangées dans m tiroirs, et si $m < n$, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

R Quelques explications de la périodicité de l'écriture décimale de nombres dans $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$

2 5 | 7 4 0 | 3,5 7 1 4 2 8 5 7 1 5 0 1 0 3 0 2 0 6 0 4 0 5 0 1 0 3	Dans l'algorithme de division décimale, les restent possibles sont $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. On constate une répétition des décimales avec un retour à 5. $\frac{25}{7} = 25 \div 7 = 3,\underline{571428}\ldots$
3 | 5 3 0 | 0,6 0	Dans l'algorithme de division décimale, les restent possibles sont $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. On constate que l'algorithme s'arrète avec un reste qui est nul. $\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0,6$.
3 | 1 3 3 0 | 0,2 3 0 7 6 9 2 3 4 0 1 0 0 9 0 1 2 0 3 0 4 0 1 0	Dans l'algorithme de division décimale, les restent possibles sont $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12\}$. On constate que l'algorithme se repète avec un retour à un reste 2. $\frac{3}{13} = 3 \div 13 = 0,\underline{230769}\ldots$