Chapitre 3

Équations et systèmes d'équations linéaires

Table 3.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 3...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître.../savoir faire...**	🪨	💎	💍
équations linéaires à une inconnue			
notion d'équation, définitions	3.1 à 3.4		
règles de balancement		3.5	
résolution d'équation linéaires de la forme $ax + b = c$		3.6, 3.7	3.8, 3.9, 3.10
résolution d'équation après développement		3.11, 3.12	
modéliser par des équations linéaires	3.13 à 3.16	3.17, 3.18	3.19 à 3.22
équations non linéaires simples			
résolution d'équation avec fractions	3.23	3.24, 3.25	3.26
résolution d'équation en isolant le terme au carré		3.27, 3.28	
résolution d'équatons avec valeur absolue		3.29	
résolution d'équation en isolant le terme inverse $\frac{1}{x}$		3.30	
systèmes linéaires d'équations			
résolution pour une variable		3.32	3.31
notion de système linéaire	3.33		
résolution par substitution		3.34, 3.35	
résolution par éliminiation		3.36, 3.37, 3.38	
modéliser à l'aide de systèmes linéaires		3.39 à 3.43	
systèmes avec paramètres			3.44, 3.45
Club maths : Equations simples et moins simples			

3.1 Equations simples : vocabulaire

Définition 3.1

Une *équation* est une égalité entre expressions littérales. Les lettres sont dites *inconnue(s)*.

Une solution de l'équation est une valeur de la (ou les) inconnues pour lesquelle(s) l'égalité est vraie.

■ Exemple 3.1

Soit l'équation $2x+3=x-5$ d'inconnue x.

1. $x=0$ n'est pas solution de l'équation car l'égalité $2(0)+3=0-5$ est ....
2. $x=-8$ est ...., car $2(-8)+3=(-8)-5$ est vraie.

■ Exemple 3.2

Soit l'équation $2x+3y=15$ d'inconnue le couple $(x\ ;\ y)$.

1. Le couple $(x=6\ ;\ y=1)$ est un couple solution car $2(6)+3(1)=15$ est ....
2. Le couple $(x=1\ ;\ y=6)$ n'est pas un couple solution car $2(1)+3(6)=15$ ....
3. Le couple $(x=-3\ ;\ y=7)$ est .... car $2(-3)+3(7)=15$ est ....

Définition 3.2

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver l'ensemble des solutions *réelles*.

R Similairement, résoudre dans $\mathbb{Z}$ c'est trouver toutes les solutions entières.

■ Exemple 3.3

1. L'équation $3x=1$ inconnue x n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.
2. L'équation $x^2+1=0$ inconnue x, n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
3. $x=3$ et $y=2$ est un couple d'entiers solution de l'équation $x^2-2y^2=1$ d'inconnues x et y.

Définition 3.3

Deux équations sont dites *équivalentes* (symbole $\iff$) si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de x.

■ Exemple 3.4

1. 0 est solution de l'équation $x^2=x$ mais pas de $x=1$. Les équations ne sont pas équivalentes.
2. Les équations $2x=x+1$ et $4x=x+3$ ont pour seule solution $x=1$. Elles sont équivalentes.

3.2 Règles de balancement

Théorème 3.1 — admis, propriétés des égalités.

Appliquer les opérations suivantes à une équation donne une équation *équivalente* :

- *ajouter* aux *2 membres* de l'équation *une même* expression :

$$\begin{aligned} & A = B \\ \iff & A + C = B + C \end{aligned} \quad +C$$

- *multiplier* les *2 membres* de l'équation par *une même* expression *non nulle* :

$$\begin{aligned} & A = B \\ \iff & A \times C = B \times C \end{aligned} \quad \times C,\ \textit{avec } C \neq 0$$

- *développer, factoriser, réduire, simplifier ...* un des deux membres de l'équation

Exemple 3.5 — additions.

$$\begin{aligned} 15 &= 4x + 3 \\ 15 - 3 &= 4x + 3 - 3 \\ \iff 12 &= 4x \end{aligned} \quad \textit{ajouter } -3 \qquad \begin{aligned} 3x + 5 &= 17 - x \\ 3x + 5 + x - 2 &= 17 - x + x - 2 \\ \iff 4x + 3 &= 15 \end{aligned} \quad \textit{ajouter } +x - 2$$

Exemple 3.6 — multiplications. on prendra soin de distribuer l'expression :

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 15 \\ 3(4x + 3) &= 3 \times 15 \\ \iff 12x + 9 &= 45 \end{aligned} \quad \times 3 \qquad \begin{aligned} 8x + 6 &= 30 \\ \frac{1}{2}(8x + 6) &= \frac{1}{2} \times 30 \\ \iff 4x + 3 &= 15 \end{aligned} \quad \times \frac{1}{2} \qquad \begin{aligned} 4x + 3 &= 15 \\ \tfrac{1}{4}(4x + 3) &= \tfrac{1}{4} \times 15 \\ \iff x + \frac{3}{4} &= \frac{15}{4} \end{aligned} \quad \times \frac{1}{4}$$

R Le théorème s'étend à la soustraction et la division d'expressions non nulles. Nous préférons écrire « ajouter -7 » et « multiplier par $\frac{1}{7}$ » au lieu de « soustraire 7 » ou « diviser par 7 ».

Exemple 3.7 — non exemple. Démonstration fausse de l'affirmation « $0 = 1$ » :

Si
$$\begin{aligned} x &= 1 \\ \iff x^2 &= x \\ \iff x^2 - x &= 0 \\ \iff x(x - 1) &= 0 \\ \iff \frac{x(x-1)}{(x-1)} &= \frac{0}{(x-1)} \\ \iff x &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \textit{multiplier par } x \\ & \textit{ajouter } -x \\ & \textit{factoriser} \\ & \textit{multiplier par } \frac{1}{x-1} \\ & \textit{simplifier} \end{aligned}$$

donc $x = 1 = 0$

3.3 Résolution d'équations linéaires à une inconnue

Définition 3.4 Une équation est *linéaire* si elle est équivalente à une équation de la forme $ax + b = 0$, d'inconnue x ($a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$).

On résout une équation linéaire en *isolant* l'inconnue. Pour cela on regarde l'enchainement des opérations et on procède par balancement à l'aide d'opérations réciproques :

— pour revenir sur une addition de b, on ajoutera l'opposé $-b$ (soustraire b)

— pour revenir sur une multiplication par a, on multipliera par l'inverse $\frac{1}{a}$ (diviser par a)

■ **Exemple 3.8 — isoler l'inconnue x.**

$$
\begin{aligned}
(E_1): \quad & ax = c \\
& x = \frac{c}{a}
\end{aligned}
\qquad \times\frac{1}{a}
$$

Le membre de gauche s'obtient par $x \xrightarrow{\times a} ax$

Pour isoler x, on balance l'équation en multipliant par l'inverse $\frac{1}{a}$.

$$
\begin{aligned}
(E_2): \quad & x + b = c \\
& -b \quad -b \\
\iff & x = c - b
\end{aligned}
\qquad -b
$$

Le membre de gauche s'obtient à partir $x \xrightarrow{+b} x + b$

Pour isoler x dans l'équation, on balance en ajoutant l'opposé $-b$.

$$
\begin{aligned}
(E_3): \quad & ax + b = 0 \\
& -b \quad -b && \quad -b \\
\iff & ax = -b \\
\iff & \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} && \quad \times\frac{1}{a} \\
\iff & x = \frac{-b}{a}
\end{aligned}
$$

Le membre de gauche s'obtient à partir $x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+b} ax + b$

Pour isoler x dans l'équation, on balance en ajoutant l'opposé $-b$ puis en multipliant par l'inverse $\frac{1}{a}$.

$$
\begin{aligned}
(E_4): \quad & a(x+b) = c \\
\iff & \frac{a(x+b)}{a} = \frac{c}{a} && \quad \times\frac{1}{a} \\
\iff & x + b = \frac{c}{a} \\
& -b \quad -b && \quad -b \\
\iff & x = \frac{c}{a} - b
\end{aligned}
$$

Le membre de gauche s'obtient à partir $x \xrightarrow{+b} x+b \xrightarrow{\times a} a(x+b)$

Pour isoler x dans l'équation, on balance en multipliant par l'inverse $\frac{1}{a}$ puis en ajoutant l'opposé $-b$.

$$
\begin{aligned}
(E_5): \quad & 4x - 3 = 3x + 7 \\
\iff & -3x \qquad -3x && \quad -3x \\
\iff & x - 3 = 7 \\
& +3 \quad +3 && \quad +3 \\
\iff & x = 10
\end{aligned}
$$

Si l'inconnue apparait dans les deux membres, on l'éliminera par balancement de l'un des deux membres.

$$
\begin{aligned}
(E_6):\quad 4(2x+5)-3(x-2)&=16 && \text{\textit{développer}}\\
8x+20-3x+6&=16 && \text{\textit{réduire}}\\
5x+26&=16\\
-26 \quad -26 & && -26\\
5x&=-10 && \times\frac{1}{5}\\
\frac{5x}{5}&=\frac{-10}{5}\\
\iff x&=-2
\end{aligned}
$$

Si l'inconnue apparait plusieurs fois dans les membre de gauche ou de droite, on développe, simplifie et réduit les membres puis on procède comme auparavant.

R Il est d'usage de vérifier que les valeurs obtenues sont bien solutions de l'équation de départ en calculant *séparément* chacun des deux membres de l'équation.

Par exemple, pour l'équation (E_5), avec $x=10$ on a : $MG = 4(10)-3 = 37$ et $MD = 3(10)+7 = 37$.

Donc $x = 10$ est bien une solution.

3.4 Systèmes d'équations

Définition 3.5 — Systèmes de 2 équations linéaires à 2 inconnues. On appelle un système de deux équations linéaires à deux inconnues un système de la forme

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x,y)$$

Les paramètres a, b, c et d sont des réels. L'accolade signifie et. Un couple solution $(x;y)$ doit vérifier les deux équations simultanément.

■ **Exemple 3.9**

Soit le système $\begin{cases} x-6y=70 \\ 6x-\ \ y=70 \end{cases}$

1. Le couple $(x=4\ ;\ y=-11)$ n'est pas un couple solution car $\begin{cases} (4)-6(-11)=70 \\ 6(4)-(-11)\neq 70 \end{cases}$.
2. Le couple $(x=10\ ;\ y=-10)$ est solution du système car $\begin{cases} (10)-6(-10)=70 \\ 6(10)-(-10)=70 \end{cases}$

■ **Exemple 3.10 — système non linéaire.**

$(3\ ;4)$ est une solution du système $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$

3.4.1 Méthode de résolution par substitution

Pour la méthode, regarder l'exemple 3.24, et identifier les étapes suivantes :

1. *Choisir* une des équations, et résoudre pour une des inconnues en fonction de l'autre.
2. *Substituer* l'expression trouvée dans l'autre équation pour obtenir une équation à une inconnue. Résoudre et déterminer la valeur de cette inconnue.
3. *Substituer* la valeur de l'inconnue de l'étape 2 dans l'expression trouvée à l'étape 1 et déterminer l'inconnue restante.

3.4.2 Méthode de résolution par élimination

Pour la méthode, regarder l'exemple 3.25, et identifier les étapes suivantes :

1. *Ajuster les coefficients* en multipliant une ou plusieurs équations par des coefficients non nuls, de sorte que le coefficient d'une variable dans une équations est *l'opposé* du coefficient dans l'autre équation.
2. *Éliminer* une inconnue par *addition* des deux équations, et résoudre pour l'inconnue restante.
3. *Substituer* la valeur de l'inconnue trouvée à l'étape 2 dans une des équations de départ, pour déterminer l'autre inconnue.

Cette méthode repose sur le théorème :

Théorème 3.2 — admis.

Opérations qui ne changent pas les solutions d'un système linéaire :

- échanger deux lignes, $L_1 \leftrightarrow L_2$
- multiplier une ligne par un réel non nul, $L_1 \leftarrow aL_2$
- ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne $L_1 \leftarrow L_1 + bL_2$

3.5 Exercices

3.5.1 Exercices : définition de solutions d'une équation

Exercice 3.1 — vérifier si une valeur est solution d'une équation à une inconnue.

Choisir la bonne réponse :

1. $x = 2$ est solution de l'équation (.....):
   (A) $\frac{1}{2}x + 3 = 5$ (B) $-\frac{1}{3}x + 7 = 6x$ (C) $5x - 8 = 2$ (D) $\frac{1}{4}x + 5 = 9$
2. $x = \frac{1}{2}$ n'est pas solution de l'équation (.....) :
   (A) $x + 1 = \frac{3}{2}$ (B) $2x^2 + 10 = 10{,}5$ (C) $-2x + 7 = 6$ (D) $4x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
3. $k = 0$ (A) { est } (B) { n'est pas } une solution de l'équation $k + 1 = -k + 1$.
4. $x = -1$ (A) { est } (B) { n'est pas } une solution de l'équation $4x^2 - 9 = 2x - 3$.
5. $x = 2$ (A) { est } (B) { n'est pas } une solution de l'équation $\frac{x^2-2}{x} - \frac{3x}{x^2-2} + 2 = 0$.
6. $x = 3$ (A) { est } (B) { n'est pas } une solution de l'équation $x^2 = 3x$.
7. $x = 3$ (A) { est } (B) { n'est pas } la seule solution de l'équation $x^2 = 3x$.
8. $x = 2$ (A) { est } (B) { n'est pas } la seule solution de l'équation $2x + 1 = 5$.

Exercice 3.2 — communiquer.

Quelles valeurs parmi -1, -3, 3 et 1 sont solutions de $x^2 - 3 = 2x$, inconnue x.

Exercice 3.3 — Vrai ou Faux ?.

	Vrai	Faux
1/ 3 est une solution de l'équation $(x-5)^2 = 4$ inconnue x	☐	☐
2/ -3 est une solution de l'équation $(x-5)^2 = 4$ inconnue x	☐	☐
3/ $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont solutions de l'équation $x^2 + 2 = 5$ inconnue x	☐	☐
4/ $\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $(2-x)(2+x) = 1$ inconnue x	☐	☐

Exercice 3.4 — Vérifier si un couple est solution d'une équation à 2 inconnues.

	Vrai	Faux
1/ Le couple $(x = -3\ ;\ y = 3)$ est solution de l'équation $6x + 3y = -2$	☐	☐
2/ Le couple $(x = -\frac{2}{3}\ ;\ y = \frac{2}{3})$ est solution de l'équation $6x + 3y = -2$	☐	☐
3/ Le couple $(x = 0\ ;\ y = -1)$ est solution de l'équation $-9x - 7y = -7$	☐	☐
4/ Le couple $(x = 3\ ;\ y = -5)$ est solution de $(x-2)(y+5) = 0$	☐	☐
5/ Le couple $(x = 1\ ;\ y = 1)$ est l'unique solution de l'équation $xy = 1$	☐	☐
6/ Le couple $(x = -6\ ;\ y = 8)$ est une solution de $x^2 + y^2 = 10^2$	☐	☐

3.5.2 Exercices : règles de balancement et équations équivalentes

Exercice 3.5

Compléter afin d'obtenir une équation équivalente à l'équation de départ.

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & 3x-2+\ldots=10+\ldots && +4 \\ \iff\ & 3x+\ldots=\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & 3x-2+\ldots=10+\ldots && +\ldots \\ \iff\ & 3x=\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & 3x-2\ldots\ldots=10\ldots\ldots && -\ldots \\ \iff\ & \ldots\ldots=10-3x\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & x^2+3x-2=10+x^2 \\ & x^2+3x-2\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && -\ldots\ldots \\ \iff\ & 3x-2=10\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & \ldots\ldots(3x-2)=10\times\ldots\ldots && \times 4 \\ \iff\ & 12x-\ldots\ldots=\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & \ldots\ldots(3x-2)=\ldots && \times\ldots \\ \iff\ & 6x-\ldots\ldots=20\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & \ldots\ldots(3x-2)=10\times\ldots\ldots && \times\frac{1}{3} \\ \iff\ & \ldots\ldots x-\ldots\ldots=\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 3x-2=10 \\ & \ldots\ldots(3x-2)=\ldots && \times\ldots \\ \iff\ & 6x-\ldots\ldots=20\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 5-2x=25 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=25\times\ldots\ldots && \times\ldots\ldots \\ \iff\ & \ldots\ldots-4x=50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 5-2x=25 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots && \times\frac{1}{2} \\ \iff\ & \ldots\ldots x-\ldots\ldots=\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & x(5-2x)=25-2x^2 && \textit{dévellopper} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=25-2x^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots && +2x^2 \\ \iff\ & \ldots\ldots x=25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 5-2x=25 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots && \times(-1) \\ & \ldots\ldots x-\ldots\ldots=-25 \\ \iff\ & 2x=\ldots\ldots && +(\ldots\ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 4x-3=3x+2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && -3x \\ & \ldots\ldots x+\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && +3 \\ \iff\ & x=\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E):\quad & 4x-3=3x+2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && -4x-2 \\ & \ldots\ldots\ldots=-x \\ & \ldots\ldots=\ldots\ldots && \times(-1) \\ \iff\ & x=\ldots\ldots \end{aligned}$$

3.5.3 Exercices : résolutions d'équations linéaires à une inconnue

■ **Exemple 3.11** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$
(E_1) : \begin{aligned} 7x &= -25 && \times\frac{1}{7} \\ \frac{7x}{7} &= \frac{-25}{7} \\ \iff x &= \frac{-25}{7} \\ \therefore \mathscr{S} &= \left\{\frac{-25}{7}\right\} \end{aligned}
$$

$$
(E_2) : \begin{aligned} \tfrac{-3}{4}x &= 13 && \times\frac{4}{(-3)} \\ \tfrac{4}{(-3)}\tfrac{(-3)}{4}x &= \frac{4}{(-3)}13 \\ \iff x &= \tfrac{-52}{3} \\ \therefore \mathscr{S} &= \left\{\frac{-52}{3}\right\} \end{aligned}
$$

$$
(E_3) : \begin{aligned} 3 - x &= 5 && -3 \\ -3 \quad & -3 \\ -x &= 2 && \times(-1) \\ x &= -2 \\ \therefore \mathscr{S} &= \{-2\} \end{aligned}
$$

$$
(E_4) : \begin{aligned} 8 - 4x &= -2 && -8 \\ 8 - 4x - 8 &= -2 - 8 \\ -4x &= -10 && \times\frac{1}{-4} \\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{-10}{-4} \\ \iff x &= \tfrac{5}{2} \\ \therefore \mathscr{S} &= \left\{\tfrac{5}{2}\right\} \end{aligned}
$$

$$
(E_5) : \begin{aligned} \frac{2x}{3} + 7 &= 5 && -7 \\ \frac{2x}{3} + 7 - 7 &= 5 - 7 \\ \frac{2}{3}x &= -2 && \times\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}x &= (-2)\frac{3}{2} \\ \iff x &= -3 \\ \therefore \mathscr{S} &= \{-3\} \end{aligned}
$$

$$
(E_6) : \begin{aligned} \frac{1}{3}(x+2) &= 6 && \times\frac{3}{1} \\ 3 \times \frac{1}{3}(x+2) &= 6(3) \\ x + 2 &= 18 && -2 \\ x + 2 - 2 &= 18 - 2 \\ \iff x &= 16 \\ \therefore \mathscr{S} &= \{16\} \end{aligned}
$$

Exercice 3.6 — équations de la forme $ax + b = c$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $4x = 28$	(E_4) $6x + 42 = 0$	(E_7) $1 = \frac{x}{-3}$	(E_{10}) $-x = 100$
(E_2) $\frac{1}{4}x = 16$	(E_5) $15 = \frac{x}{3}$	(E_8) $7 = 11 - 3x$	(E_{11}) $\frac{x}{9} = -18$
(E_3) $2x + 3 = 14$	(E_6) $-18 = -3x$	(E_9) $42x = 0$	(E_{12}) $5 - 2x = -9$

Exercice 3.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $-10 = 3x + 7$	(E_4) $\dfrac{x-4}{3} = -1$	(E_7) $0 = 12 - \frac{5x}{3}$	(E_{10}) $\dfrac{x}{2} - 4 = 7$
(E_2) $-81 = -51 - 3x$	(E_5) $24x + 8 = 0$	(E_8) $\dfrac{1}{2}(x+5) = 6$	(E_{11}) $\frac{1}{3}(2 - x) = -5$
(E_3) $7 - x = 11$	(E_6) $60 - \frac{3}{5}x = 0$	(E_9) $\frac{2}{7}x - 5 = 12$	(E_{12}) $\dfrac{2x-3}{5} = 4$

Exercice 3.8

Parmi les équations de l'exercice 3.7, préciser celles dont la solution est dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.9

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $3n + 2$ est un diviseur de 17.

Exercice 3.10 — équation à paramètre.

$x = 4$ est solution de l'équation $2ax + x - 7 = 0$. Déterminer la valeur du paramètre a.

■ **Exemple 3.12** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x :

$$
\begin{aligned}
(E_1):\quad & 7x - 4 = 3x + 8 \\
& -3x + 4 \quad -3x + 4 && \Big) -3x + 4 \\
\iff\ & 4x = 12 && \Big) \times \frac{1}{4} \\
\iff\ & \frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \\
\iff\ & x = 3; \\
\therefore\ & \mathscr{S} = \{3\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(E_2):\quad & 5 - 3(-1 + x) = x && \Big) \textit{développer} \\
& 5 + 3 - 3x = x \\
& +3x \quad +3x && \Big) +3x \\
\iff\ & 8 = 4x && \Big) \times \frac{1}{2} \\
\iff\ & \frac{8}{4} = \frac{4x}{4} \\
\iff\ & 2 = x \quad \text{ou} \quad x = 2 \\
\therefore\ & \mathscr{S} = \{2\}
\end{aligned}
$$

Exercice 3.11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires suivantes puis vérifier les solutions obtenues.

1. (E_1) $3(x+2)+2(x+4)=19$ | (E_2) $2(x-7)-5(x+1)=-7$ | (E_3) $5(2x+1)-3(x-1)=-6$
2. (E_1) $-x+3=4x$ | (E_3) $5x-5=4x+1$ | (E_5) $1-3x=2x-9$

   (E_2) $2x+3=7-3x$ | (E_4) $2x-3=6-x$ | (E_6) $-4x=8-2x$
3. (E_1) $6-x+2(1-x)=7-2x$ | (E_2) $8-5(3-x)=9+x$ | (E_3) $6+7x-2(3-x)=5x-8$
4. (E_1) $5(2x-1)+2=10x-3$ | (E_2) $2(9x-1)=6(3x+1)$ | (E_3) $4x+1=3x+1$

   Commenter vos réponses.

■ **Exemple 3.13 — autres développements.**

$$
\begin{aligned}
(E):\quad (x-3)^2 &= (4+x)(2+x) && \Big) \textit{développer} \\
x^2 - 6x + 9 &= 8 + 4x + 2x + x^2 && \Big) \textit{réduire} \\
x^2 - 6x + 9 &= 8 + 6x + x^2 && \Big) -x^2 \\
-6x + 9 &= 8 + 6x && \Big) +6x \\
9 &= 8 + 12x && \Big) -8x \\
1 &= 12x && \Big) \times \frac{1}{12} \\
\frac{1}{12} &= \frac{12x}{12} \\
\therefore x &= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Pour certaines équations plus complexes, développer et simplifier les membres permet de se ramener à une équation linéaire équivalente.

Exercice 3.12

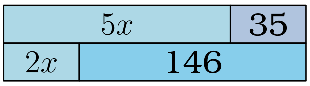
Résoudre en développant dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $x(x+5)=(x+4)(x-3)$ | (E_3) $x(2x+1)-2(x+1)=2x(x-1)$

(E_2) $(x+3)(x-2)=(4-x)^2$ | (E_4) $x^2-3=(2+x)(3+x)$

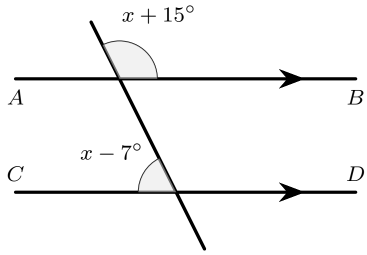
3.5.4 Exercices : modéliser par une équation

Exercice 3.13 — modèle en barre.



Écrire une équation vérifiée par x et la résoudre.

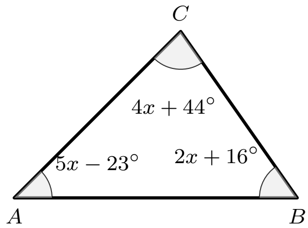
Exercice 3.14



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Les mesures des angles sont exprimées en degrés.

1. Déterminer une équation vérifiée par x.
2. En déduire la valeur de x.

Exercice 3.15

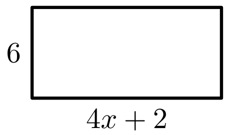


Dans le triangle ABC les mesures des angles sont exprimées en degrés.

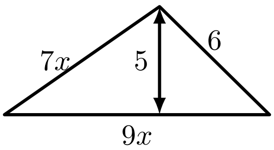
1. Déterminer une équation vérifiée par x.
2. En déduire la valeur de x et montrer que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 3.16

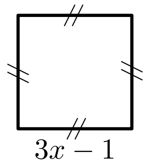
Dans chaque cas, déterminer une équation en x et la résoudre.



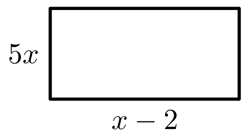
(a) Rectangle d'aire 204 cm^2



(b) Triangle d'aire 63 cm^2

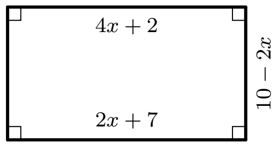


(c) Carré de périmètre 176 cm.



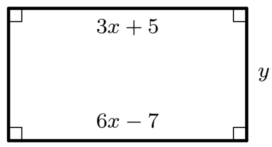
(d) Rectangle de périmètre 152 cm.

Exercice 3.17



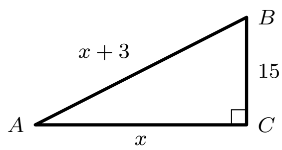
1. Utiliser deux côtés opposés pour écrire une équation vérifiée par x .
2. Déterminer la valeur de x et en déduire le périmètre et l'aire du rectangle.

Exercice 3.18



1. Donner une équation vérifiée par x et déterminer la valeur de x.
2. Sachant que l'aire du rectangle est 51 cm^2, déterminer y.

Exercice 3.19



Le triangle ABC ci-contre est rectangle en C.

Déterminer une équation vérifiée par x et la résoudre.

Exercice 3.20 — équation à paramètre.

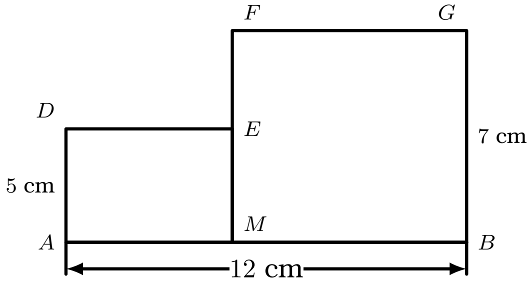
La solution de l'équation $3x + 8 = 2$ est l'inverse de la solution de l'équation $2x - a = 4x + 3$.

Déterminer une équation vérifiée par a puis en déduire la valeur de a.

■ **Exemple 3.14** — **https://www.geogebra.org/m/uvrzbr5p.**

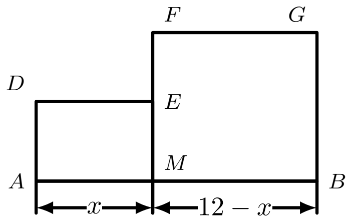
Dans la figure ci-contre, le point M est sur le segment $[AB]$.

Où placer le point M afin que les aires des rectangles $AMED$ et $MBGF$ soient égales ?



solution.

1. *Introduire une inconnue :* On pose $x = AM$.
2. *Solutions admissibles de l'inconnue :* $0 \leqslant x \leqslant 12$.
3. *Modéliser par une équation :* aire $AMED$ = aire $MBGF$

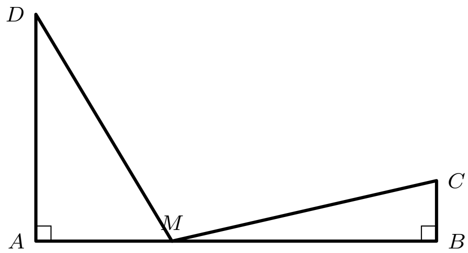


$$AM \times AD = MB \times BG$$
$$x(5) = (12 - x)(7)$$
$$5x = 84 - 7x \quad +7x$$
$$12x = 84$$
$$x = \frac{84}{12} = 7$$

∴ Il faut placer M à 7 cm de A. ■

Exercice 3.21

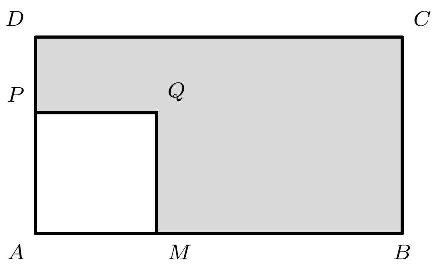
Dans la figure ci-contre, le point M est sur le segment $[AB]$ et $AB = 13$ cm, $AD = 5$ cm et $BC = 2$ cm.



1. Où placer le point M afin que les aires des triangles AMD et MBC soient égales ?
2. Même question, mais afin que l'aire du triangle AMD soit le double de celle de MBC.
3. Où placer le point M afin que M soit équidistant de D et de C (i.e. $MD = MC$).

Exercice 3.22

Dans la figure ci-contre, le point M est sur le segment $[AB]$.



1. Dans cette question, $AB = 12$ cm et $AD = 8$ cm
   Où placer le point M afin que les aires du carré $AMQP$ et celle de la partie grise $PQMBCDP$ soient égales ?
2. Même question avec $AB = 15$ cm et $AD = 5$ cm.

3.5.5 Exercices : équations avec des fractions

■ **Exemple 3.15** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x:

$$
\begin{aligned}
(E_1):\quad \frac{2-x}{3} &= \frac{x}{5} && \textit{parenthèses autour des numérateurs}\\
\frac{(2-x)}{3} &= \frac{(x)}{5} && \times 15,\ \textit{multiplier par le plus petit dénominateur commun}\\
\frac{15(2-x)}{3} &= \frac{15(x)}{5} && \textit{simplifier}\\
5(2-x) &= 3x && \textit{developper et réduire}\\
10-5x &= 3x\\
10 &= 8x \iff x = \tfrac{10}{8} = \tfrac{5}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(E_2):\quad \frac{5}{4x} &= \frac{4}{3x+2} && \textit{parenthèses autour des numérateurs et dénominateurs}\\
\frac{5}{(4x)} &= \frac{4}{(3x+2)} && \times(4x)(3x+2),\ \textit{multiplier par le plus petit dénominateur commun}\\
\frac{5(4x)(3x+2)}{(4x)} &= \frac{4(4x)(3x+2))}{(3x+2)} && \textit{simplifier}\\
5(3x+2) &= 4(4x) && \textit{developper et réduire}\\
15x+10 &= 16x && -15x\\
\therefore\quad 10 &= x
\end{aligned}
$$

Exercice 3.23

Compléter les résolutions suivantes.

$$
\begin{aligned}
(E_1):\quad 2x-3+\frac{x+2}{2}-\frac{x-4}{3} &= 5\\
\frac{(2x-3)}{1}+\frac{\ldots x+2\ldots}{2}-\frac{\ldots x-4\ldots}{3} &= 5\\
\ldots(2x-3)+\frac{\ldots(x+2)}{2}-\frac{\ldots(x-4)}{3} &= \ldots(5)\\
\ldots(2x-3)+\ldots(x+2)-\ldots(x-4) &= \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\\
13x-4 &= \ldots\\
13x = \ldots; \iff x &= \tfrac{\ldots}{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(E_2):\quad \frac{3x+2}{1-2x} &= \frac{1}{6}\\
\frac{\ldots 3x+2\ldots}{\ldots 1-2x\ldots} &= \frac{1}{6}\\
\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots(3x+2)}{(1-2x)} &= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{6}\\
\ldots(3x+2) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\
20x &= -11;\\
\iff x &= \tfrac{-11}{20}
\end{aligned}
$$

Exercice 3.24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x:

$(E_1)\ \frac{x}{4} = \frac{1+x}{3}$

$(E_2)\ \frac{1-3x}{4} = \frac{2+x}{3}$

$(E_3)\ \frac{3-2x}{5} = \frac{2+5x}{-3}$

$(E_4)\ \frac{x-5}{3} - 2x = \frac{2x+1}{2}$

$(E_5)\ \frac{2}{3x} = \frac{-4}{9}$

$(E_6)\ \frac{4}{x+1} = \frac{5}{3}$

Exercice 3.25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x:

$(E_1)\ \dfrac{x+4}{-3x-3} = \dfrac{7}{2}$ | $(E_2)\ \dfrac{6x+1}{3x-2} = 5$ | $(E_3)\ \dfrac{5x+2}{2x-3} = 0$ | $(E_4)\ \dfrac{5}{2x-3} = \dfrac{3}{4x-5}$

■ **Exemple 3.16 — non exemple.**

Dans la résolution de l'équation (E), la multiplication par $12x^2$ (qui est *un* dénominateur commun) est soumise à la condition implicite que $12x^2 \neq 0$. La valeur obtenue $x = 0$ n'est pas solution de l'équation (E), et ici, $\mathscr{S} = \varnothing$.

$$
\begin{aligned}
(E):\quad & \frac{4}{3x} = \frac{5}{4x} && \times 12x^2 \\
\cancel{\iff}\ & \frac{(12x^2)(4)}{(3x)} = \frac{(12x^2)(5)5}{(4x)} && \textit{simplifier} \\
\iff\ & 16x = 15x && -15x \\
\iff\ & x = 0
\end{aligned}
$$

■ **Exemple 3.17 — valeurs interdites et domaine de résolution.**

Lors de résolution d'équations rationnelles, on commence par préciser le domaine de résolution en déterminant les *valeurs interdites* (V.I.) pour lesquelles les dénominateurs sont nuls.

$$(E_1):\quad \frac{2}{6x-1} = \frac{3}{5x-7}$$

2 V.I. $\quad 6x-1=0 \quad$ et $\quad 5x-7=0$

$x = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{7}{5}$

pour $x \in D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{6}\ ;\ \frac{7}{5}\right\}$

$$
\begin{aligned}
(E_1):\quad & \frac{2}{6x-1} = \frac{3}{5x-7} \\
\iff & \frac{2(6x-1)(5x-7)}{(6x-1)} = \frac{3(6x-1)(5x-7)}{(5x-7)} \\
\iff & 2(5x-7) = 3(6x-1) \\
\iff & 10x - 14 = 18x - 3 \\
\iff & x = \frac{-11}{8} \in D \\
\therefore\quad & \mathscr{S} = \left\{\frac{-11}{8}\right\}
\end{aligned}
$$

$$(E_2):\quad \frac{3x}{x-1} - \frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x-1}$$

2 V.I. $\quad x-1=0 \quad$ et $\quad x=0$

$x = 1$ et 0

pour $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ 0\}$

$$
\begin{aligned}
(E_1):\quad & \frac{3x}{x-1} - \frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x-1} \\
\iff & \frac{3x(x-1)(x)}{x-1} - \frac{(2x-1)(x-1)(x)}{x} = \frac{3(x-1)(x)}{x-1} \\
\iff & 3x^2 - (2x-1)(x-1) = 3x \\
\iff & x^2 + 3x - 1 = 3x \\
\iff & x^2 = 1 \\
\iff & x = -1 \in D \quad \text{ou} \quad x = 1 \notin D \\
\therefore\quad & \mathscr{S} = \{-1\}
\end{aligned}
$$

Exercice 3.26

Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1)\ \dfrac{15}{x} = 2 + \dfrac{3(x+5)}{x}$ | $(E_2)\ \dfrac{3}{6x+1} = \dfrac{5}{10x-6}$ | $(E_3)\ \dfrac{3x-2}{x+1} - 2 = \dfrac{-5}{x+1}$

R À défaut de préciser le domaine de résolution, on peut uniquement affirmer que les solutions sont parmi les valeurs trouvées. Il faudra alors *vérifier* celles qui sont solutions.

3.5.6 Exercices : isoler une nouvelle variable

Proposition 3.3 — admis. Soit l'équation $x^2 = a$, inconnue x.

1. Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$.
2. Si $a = 0$, l'équation admet une solution unique $x = \sqrt{0} = 0$.
3. Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solutions réelles.

■ **Exemple 3.18 — résoudre des équations quadratiques simples de la forme $ax^2 + b = c$.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(E_1)\colon\ & 3x^2 - 1 = 8 && \quad +1\\
\iff & 3x^2 = 9 && \quad \times\tfrac{1}{3}\\
\iff & x^2 = 3\\
\iff & x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}\\
\therefore\ & \mathscr{S} = \left\{\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_2)\colon\ & 5 - 2x^2 = 11 && \quad -5\\
\iff & -2x^2 = 6 && \quad \times\tfrac{-1}{2}\\
\iff & x^2 = -3\\
& \text{impossible}\\
\therefore\ & \mathscr{S} = \varnothing
\end{aligned}$$

Exercice 3.27 — isoler x^2 pour résoudre.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant le terme au carré :

(E_1) $x^2 = 4$	(E_3) $3x^2 - 48 = 0$	(E_5) $4x^2 = 4$	(E_7) $5x^2 + 7 = 42$
(E_2) $2x^2 = -10$	(E_4) $6x^2 = 0$	(E_6) $4x^2 - 5 = 15$	(E_8) $7 - 3x^2 = 19$

■ **Exemple 3.19 — résoudre des équations quadratiques simples de la forme $(x \pm a)^2 = k$.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(E_1)\colon\ & (x+3)^2 = 36\\
\iff & x + 3 = \pm\sqrt{36}\\
\iff & x + 3 = \pm 6\\
\iff & x + 3 = 6 \quad \text{ou} \quad x + 3 = -6\\
\iff & x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -9\\
\therefore\ & \mathscr{S} = \{3\ ;\ -9\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_2)\colon\ & (5x+2)^2 = -1\\
& \text{impossible}\\
\therefore\ & \mathscr{S} = \varnothing
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_3)\colon\ & 7 - (x-4)^2 = 0\\
\iff & 7 = (x-4)^2\\
\iff & x - 4 = \pm\sqrt{7}\\
\iff & x - 4 = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x - 4 = -\sqrt{7}\\
\iff & x = 4 + \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = 4 - \sqrt{7}\\
\therefore\ & \mathscr{S} = \{4 + \sqrt{7}\ ;\ 4 - \sqrt{7}\}
\end{aligned}$$

Exercice 3.28 — entrainement intelligent : variations.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant le terme au carré :

(E_1) $(x-3)^2 = 16$	(E_4) $2(5x+9)^2 = -5$	(E_7) $10 - (x-2)^2 = 0$
(E_2) $(x+4)^2 = 13$	(E_5) $(x-7)^2 = 0$	(E_8) $(2x-3)^2 - 25 = 0$
(E_3) $(x+1)^2 = 9$	(E_6) $(x+4)^2 + 25 = 0$	(E_9) $\dfrac{(3x+1)^2}{2} = 8$

Proposition 3.4 Soit l'équation $|x| = a$, inconnue x.

1. Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $x = a > 0$ et $x = -a < 0$.
2. Si $a = 0$, l'équation admet une solution unique $x = 0$.
3. Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solutions réelles.

■ **Exemple 3.20 — isoler le terme en valeur aboslue.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\iff 2|x| - 5 = 3 \\ &\iff 2|x| = 8 \\ &\iff |x| = 4 \\ &\iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4 \\ &\mathscr{S} = \{-4\ ;\ 4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|2x - 5| = 3 \\ &\iff 2x - 5 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = -3 \\ &\iff 2x = 8 \quad \text{ou} \quad 2x = 2 \\ &\iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 1 \\ &\mathscr{S} = \{1\ ;\ 4\} \end{aligned}$$

Exercice 3.29 — entrainement intelligent : variations.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $|x| = 10$	(E_3) $|x - 5| = 1$	(E_5) $3|x| + 5 = 4$	(E_7) $2 - 3|x| = 6$
(E_2) $|2x| = 3$	(E_4) $|3x + 5| = 4$	(E_6) $|4x - 3| = -1$	(E_8) $11 - 2|x - 5| = 6$

Proposition 3.5 Soit l'équation $\dfrac{1}{x} = a$, inconnue x.

1. Si $a \neq 0$, l'équation admet une solution réelles unique $x = \dfrac{1}{a}$
2. Si $a = 0$, l'équation n'a pas de solutions.

■ **Exemple 3.21 — résoudre par inversion une équation de la forme $\frac{a}{x} + b = c$.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1):\quad \frac{3}{x} &= -11 && \Big)\times\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\times\frac{3}{x} &= \frac{-11}{3} \\ \frac{1}{x} &= \frac{-11}{3} && \Big)\textit{inversion} \\ \iff x &= \frac{-3}{11} \\ \therefore\quad \mathscr{S} &= \{\frac{-3}{11}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_2):\quad \frac{7}{5x} &= 3 && \Big)\times\frac{5}{7} \\ \frac{5}{7}\times\frac{7}{5x} &= 3\times\frac{5}{7} \\ \frac{1}{x} &= \frac{15}{7} && \Big)\textit{inversion} \\ \iff x &= \frac{7}{15} \\ \therefore\quad \mathscr{S} &= \{\frac{7}{15}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_3):\quad \frac{2}{x} - 5 &= 3 && \Big)+5 \\ \frac{2}{x} &= 8 && \Big)\times\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} &= 4 && \Big)\textit{inversion} \\ \iff x &= \frac{1}{4} \\ \therefore\quad \mathscr{S} &= \{\frac{1}{4}\} \end{aligned}$$

Exercice 3.30

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $\dfrac{1}{x} = 2$	(E_3) $\dfrac{15}{x} = \dfrac{-5}{17}$	(E_5) $40 - \dfrac{14}{x} = 20$
(E_2) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{7}$	(E_4) $\dfrac{2}{x} = 26$	(E_6) $\dfrac{1}{x} - 11 = \dfrac{10}{23}$

3.5.7 Exercices : résoudre pour une variable

■ **Exemple 3.22**

Beaucoup de formules (ou équations) en sciences font intervenir *plusieurs* variables. Il est souvent nécessaire de savoir exprimer une des variables en fonction des autres.

1. La force d'attraction F entre deux corps de masses m et M séparés d'une distance de r est donnée par l'équation $F = G\dfrac{mM}{r^2}$.
   a) Résoudre pour M cette équation (c.à.d. exprimer M en fonction des autres variables).
   b) Résoudre pour r cette équation (c.à.d. exprimer r en fonction des autres variables).
2. L, l et h sont les trois dimensions d'un pavé droit.
   L'aire totale A vérifie l'équation $A = 2Ll + 2Lh + 2lh$.
   Résoudre pour l cette équation (c.à.d. exprimer l en fonction des autres variables).

solution.

$$\begin{aligned}
F &= G\frac{mM}{r^2} && \text{\textit{Factoriser } } M \text{ \textit{dans le MD}}\\
F &= \left(\frac{Gm}{r^2}\right) M && \times\frac{r^2}{Gm}\\
\frac{r^2}{Gm}F &= \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right) M && \text{\textit{simplifier}}\\
M &= \frac{r^2F}{Gm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2Ll + 2Lh + 2lh && \text{\textit{Regrouper les termes en} } l\\
A &= (2Ll + 2lh) + 2Lh && \text{\textit{ajouter} } -2Lh\\
A - 2Lh &= 2Ll + 2lh && \text{\textit{factoriser par} } l\\
A - 2Lh &= l(2L + 2h) && \text{\textit{multiplier par} } \frac{1}{2L+2h}\\
\frac{A - 2Lh}{2L + 2h} &= \frac{l(2L + 2h)}{2L + 2h} = l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{GmM}{(r^2)} && \times\frac{1}{GmM}\\
\frac{F}{GmM} &= \frac{1}{r^2} && \text{\textit{inverser}}\\
\frac{GmM}{F} &= r^2 && \text{\textit{racine carrée}}\\
\sqrt{\frac{GmM}{F}} &= r
\end{aligned}$$

La distance r étant positive, la valeur $r = -\sqrt{\dfrac{GmM}{F}}$ n'est pas *admissible*. ■

Exercice 3.31

1. Le périmètre d'un cercle est donné par $P = 2\pi r$. Résoudre pour r.
2. La loi des Gaz parfait est donnée par l'équation $PV = nRT$. Résoudre pour R.
3. La loi universelle de l'attraction est donnée par $F = G\dfrac{mM}{r^2}$. Résoudre pour m.
4. Le périmètre d'un rectangle est donné par $P = 2l + 2L$. Résoudre pour L.
5. Le volume d'un cone est donné par $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Résoudre pour h.
6. L'énergie cinétique est donnée par $E = \frac{1}{2}mv^2$. Résoudre pour v.
7. La distance parcourue lors d'une chute libre est donnée par $d = \dfrac{1}{2}gt^2$. Résoudre pour t.

■ **Exemple 3.23 — équations linéaires à 2 inconnues.**

Résoudre pour x les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y &= 5x+3 && \text{ajouter} -3\\ y-3 &= 5x && \text{multiplier par } \tfrac{1}{5}\\ \frac{y-3}{5} &= \frac{5x}{5} && \text{simplifier}\\ \frac{y-3}{5} &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2yx &= 3x+5 && \text{ajouter} -3x \text{ pour regrouper les termes en } x\\ 2yx-3x &= 5 && \text{factoriser par } x\\ x(2y-3) &= 5 && \text{multiplier par } \tfrac{1}{2y-3}\\ x = \frac{x(2y-3)}{(2y-3)} &= \frac{5}{2y-3} \end{aligned}$$

Exercice 3.32

Résoudre pour x les équations suivantes :

(E_1) $y=-3x+1$	(E_3) $3x-2y=12$	(E_5) $3x-5xy=y+1$
(E_2) $y=2x-3$	(E_4) $5x+7y=1$	(E_6) $12-2yx+5x=0$

3.5.8 Exercices : systèmes d'équations linéaires à 2 inconnues

Exercice 3.33 — concepts. Complétez.

1. Le couple **(A)** $(5;-1)$ **(B)** $(-1;3)$ **(C)** $(2;1)$ est solution du systeme $\begin{cases} 2x+3y &= 7\\ 5x-y &= 9 \end{cases}$.
2. Le couple **(A)** $(-2;7)$ **(B)** $(1;-1)$ **(C)** $(-1;1)$ est solution du systeme $\begin{cases} -8x+y &= -9\\ -3x+5y &= -8 \end{cases}$.
3. Si $(1;3)$ est solution du système $\begin{cases} x+2y &= b\\ x-5y &= a \end{cases}$, alors $a=$............... et $b=$................
4. Si $\begin{cases} 2x-3y=12\\ x\quad=0 \end{cases}$ alors $2(0)-3y=12$ donc $y=$..
5. Si $\begin{cases} 8x-12y=72\\ y=0 \end{cases}$ alors $8x-12(0)=72$ donc $x=$ ....
6. Si $\begin{cases} 4x+6y=60\\ y=5 \end{cases}$ alors $4x+6(\dots)=60$ donc $x=$..
7. Si $\begin{cases} 18x-12y=36\\ x\quad=-2 \end{cases}$ alors $18(\dots)-12(\dots)=36$ donc $y=$..
8. Si $\begin{cases} 3x+4y=24\\ y=0 \end{cases}$ alors $3\dots\dots+4\dots\dots=24$ donc $x=$ ....
9. Si $\begin{cases} x\quad=-4\\ 3x+4y=24 \end{cases}$ alors $3\dots\dots+4\dots\dots=24$ donc $y=$ ....

■ **Exemple 3.24 — Résoudre par substitution.**

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$$

le coefficient de y dans l'équation 1 est ± 1. Afin d'éviter des fractions, on choisit de résoudre pour y l'équation 1

$$\iff \begin{cases} y = -2x + 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases}$$

***substituer** l'expression de y dans l'équation 2*

$$\iff \begin{cases} y = -2x + 1 \\ 3x + 4(-2x + 1) = 14 \end{cases}$$

simplifier

$$\iff \begin{cases} y = -2x + 1 \\ -5x + 4 = 14 \end{cases}$$

résoudre pour x l'équation 2

$$\iff \begin{cases} y = -2x + 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

substituer la valeur de x dans l'équation 1

$$\iff \begin{cases} y = -2(-2) + 1 = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$(-2\ ;\ 5)$ est l'unique couple solution

vérification

$$\begin{cases} 2(-2) + (5) = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases}$$

Exercice 3.34 — choisir l'inconnue la plus simple à substituer. Compléter :

$$(S_1)\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 4x + 28y = 44 \\ x - 16y = 34 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 3x - y = 15 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} -x + 5y = 75 \\ 10x + 3y = -8 \end{cases} \quad (S_5)\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

1. Pour résoudre le système (S_1), on choisit de résoudre pour ...... l'équation .... On peut écrire : $y =$ .... On subtitue y dans l'équation ......pour avoir : $4x - 3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 10$.
2. Pour résoudre le système (S_2), on choisit de résoudre pour ...... l'équation .... On peut écrire : ...... = ...
3. Pour résoudre le système (S_3), on choisit de résoudre pour ...... l'équation .... On peut écrire : ...... = ...
4. Pour résoudre le système (S_4), on choisit de résoudre pour ...... l'équation .... On peut écrire : ...... = ...
5. Soit le système (S_5).Si on choisit de résoudre pour x l'équation .... Alors on peut écrire : $x =$ .... Si on choisit de résoudre pour y l'équation .... Alors on peut écrire : $y =$ ....

Exercice 3.35

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue (x, y) par substitution.

$(S_1)\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=-3\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}2x-y=3\\-4x+2y=22\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}x+2y=-3\\-4x+2y=22\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}73x+0{,}5y&=93\\50x-y&=10\end{cases}$

■ Exemple 3.25 — Résoudre par élimination.

$$\begin{cases}2x-3y=5\\5x+2y=3\end{cases}$$

on souhaite éliminer l'inconnue x. Pour cela $\begin{cases}5L_1\to L_1\\-2L2\to L2\end{cases}$

$$\xLeftrightarrow[-2L2\to L2]{5L_1\to L_1}\begin{cases}10x-15y=25\\-10x-\ \ 4y=-6\end{cases}$$

on élimine l'inconnue x par addition $L1+L2\to L1$

$$\xLeftrightarrow{L1+L2\to L1}\begin{cases}0x-19y=19\\-10x-\ \ 4y=-6\end{cases}$$

on résout $L1$ pour y

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\-10x-4y=-6\end{cases}$$

substituer la valeur trouvée de y dans $L2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\-10x-4(-1)=-6\end{cases}$$

résoudre $L2$ pour x.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x\ \ =1\end{cases}$$

$(1\ ;\ -1)$ est l'unique couple solution

vérification

$$\begin{cases}2(1)-3(-1)=5\\5(1)+2(-1)=3\end{cases}$$

Exercice 3.36 — choix des coefficients pour multiplier les équations. Compléter.

1. Pour le système $\begin{cases}2x+2y=18\\-2x+6y=30\end{cases}$ l'addition $L1+L2$ donne .... = ... Donc $y=$ ......
2. Pour éliminer l'inconnue y, on peut : ...... $L1\to L1$ et ...... $L2\to L2$
   $\begin{cases}2x-3y=5\\5x+2y=3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\\\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\end{cases}$ L'addition $L1+L2$ donne ...... $x=$ ......
3. Pour éliminer l'inconnue x, on peut : ...... $L1\to L1$ et ...... $L2\to L2$
   $\begin{cases}x+2y=-3\\-4x+2y=22\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\\\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\end{cases}$ L'addition $L1+L2$ donne ...... $y=$ ......
4. Pour éliminer l'inconnue y, on peut : ...... $L1\to L1$ et ...... $L2\to L2$
   $\begin{cases}x+2y=-3\\-4x+2y=22\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\\\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\end{cases}$ L'addition $L1+L2$ donne ...... $x=$ ......
5. Pour éliminer l'inconnue y, on peut : ...... $L1\to L1$ et ...... $L2\to L2$
   $\begin{cases}3x+4y=9\\5x+6y=14\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\\\ldots\ldots x-\ldots\ldots y=\ldots\ldots\end{cases}$ L'addition $L1+L2$ donne ...... $x=$ ......

Exercice 3.37

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue (x, y) par élimination.

$(S_1)\begin{cases}2x+3y=-11\\3x-5y=12\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}6x-5y=2\\-7x+3y=1\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}-6x+4y=23\\6x+2y=19\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}2x-7y=11\\-5x+13y=-17\end{cases}$

■ **Exemple 3.26 — systèmes sans solutions et systèmes ayant une infinité de solutions.**

$$\begin{cases}8x-2y=5\\-12x+3y=7\end{cases}$$

$$\underset{2L2\to L2}{\overset{3L_1\to L_1}{\Longleftrightarrow}}\begin{cases}24x-6y=15\\-24x+6y=14\end{cases}$$

$$\overset{L1+L2\to L1}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}0=29\\-24x-6y=14\end{cases}$$

$$\mathscr{S}=\varnothing$$

$$\begin{cases}3x-6y=12\\4x-8y=16\end{cases}\underset{3L2\to L2}{\overset{4L_1\to L_1}{\Longleftrightarrow}}\begin{cases}12x-24y=48\\12x-24y=48\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow 12x-24y=48$$

On pose $x=t$

$$12t-24y=48$$

Résoudre pour y

$$y=\frac{1}{2}t-2$$

$$\mathscr{S}=\left\{\left(t\ ;\ \tfrac{1}{2}t-2\right)\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

Tous les couples $(t\ ;\ \frac{1}{2}t-2)$, avec $t\in\mathbb{R}$ sont solutions.

Exercice 3.38

Résoudre les systèmes suivantes. Pour les systèmes ayant une infinités de solutions donner leur solution sous la forme de l'exemple 3.26.

$(S_1)\begin{cases}x+4y=8\\3x+12y=2\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}-3x+5y=2\\9x-15y=-6\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}2x-6y=10\\-3x+9y=-15\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}2x-3y=-8\\14x-21y=3\end{cases}$

3.5.9 Exercices : modéliser par un système linéaire

Exercice 3.39

Le couple $(x=-1; y=1)$ est solution du système $\begin{cases}3x-2y=a+1\\x+3y=2b-3a\end{cases}$. Déterminer a et b.

Exercice 3.40

Deux réels x et y ont pour somme 34 et différence 10. Donner un système vérifié par x et y et le résoudre.

Exercice 3.41

La somme de deux nombres x et y est égale au double de leur différence. Le plus grand est 6 de plus que le double du plus petit. Donner un système vérifié par x et y et le résoudre.

Exercice 3.42

Travailler 45 jours dans deux entreprises différentes a rapporté à Jim 3487 €. Il gagnait 134 € par jour dans l'entreprise A et 75 € par jour dans l'entreprise B.

On note x le nombre de jours travaillés dans l'entreprise A, et y dans l'entreprise B. Donner un système linéaire vérifié par x et y et le résoudre.

■ **Exemple 3.27 — problème du canotier.**

Naomi remonte 4 km d'une rivière à contre-courant en $1{,}5$ h. Pour le retour, elle met 45 min. On suppose qu'elle rame à cadence contante x km/h par rapport à l'eau, et que la vitesse du courant est égale à y km/h.

1. Exprimer en fonction de x et y, la vitesse de déplacement du bateau à contre-courant et en descendant le courant.
2. Donner un système d'équations vérifié par x et y et le résoudre.

solution.

1. la vitesse en descendant le courant correspond à $x+y$. la vitesse à contre-courant est $x-y$.
2. vitesse à contre-courant $\times$ temps à contre courant $=$ distance parcourue

$$(x-y)\times 1.5 = 4$$

vitesse descendant le courant $\times$ temps descendant le courant $=$ distance parcourue

$$(x+y)\times 0.75 = 4$$

Donc x, et y sont solutions de $\begin{cases} \frac{3}{2}(x-y)=4 \\ \frac{3}{4}(x+y)=4 \end{cases}$. La résolution donne $x=4$ km/h et $y=\frac{4}{3}$ km/h.

■

Exercice 3.43

Naomi emprunte un biplace pour pour survoler le Pilat. En partant de l'Aero-club du Roussillon, elle fait 180 km contre le vent en 2 h. Au retour, le vent souffle toujours à la même vitesse, et elle retourne à l'Aéro-club en 1 h 12 min.

En supposant que la vitesse air est constante tout le long du trajet, déterminer la vitesse du vent et la vitesse air de l'avion de Naomi.

Exercice 3.44 — système à un paramètre.

Soit $a\neq 1$. Exprimer en fonction de a, la solution $(x;y)$ du $\begin{cases} x+y=0 \\ x+ay=1 \end{cases}$

Exercice 3.45 — système à paramètres.

Soit $a\neq b$. Exprimer en fonction de a et b, la solution $(x;y)$ du $\begin{cases} ax+by=0 \\ x+y=1 \end{cases}$