Chapitre 4

Géométrie analytique (1)

La *géométrie analytique* est une approche de la géométrie à l'aide d'un système de coordonnées.

Table 4.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 4…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
Formule de la distance dans un repère orthonormé			
calculer une distance dans un repère orthonormé		4.1	
déterminer la nature d'un triangle		4.2, 4.3	4.4
problèmes		4.5	4.12
Coordonnées du milieu d'un segment			
déterminer graphiquement ou par le calcul le milieu d'un segment	4.6	4.7, 4.8	
déterminer la nature d'un quadrilatère		4.9, 4.10	4.11
déterminer les coordonnées d'une extrémité d'un segment	4.13	4.14, 4.15	
4e sommet d'un parallélogramme)		4.16	

4.1 Repères orthonomés

Définition 4.1 O, I et J sont trois points non alignés. Le repère $(O; I, J)$ du plan est formé de :

1. l'origine O du repère
2. (OI) est l'axe gradué des abscisses (des x). Le point I a pour abscisse 1.
3. (OJ) est l'axe gradué des ordonnées (des y). Le point J a pour ordonnée 1.

Chaque point M du plan correspond à un unique couple de coordonnées $(x\ ;\ y)$. Ces coordonnées se lisent sur les deux axes en tracant leurs *parallèles* passant par M.

■ **Exemple 4.1** Dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous, préciser les coordonnées des points suivants :

$O(\quad ; \quad)$

$I(\quad ; \quad)$

$J(\quad ; \quad)$

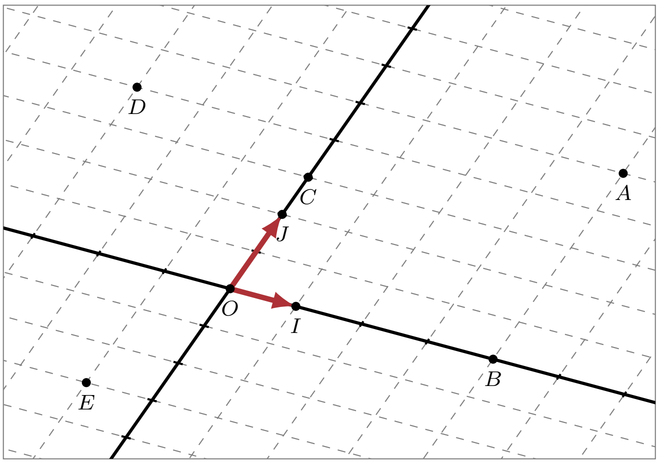
$A(\quad ; \quad)$

$B(\quad ; \quad)$

$C(\quad ; \quad)$

$D(\quad ; \quad)$

$E(\quad ; \quad)$



Définition 4.2 — types de repères.

— Si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit *orthonormé*.

— Si le triangle OIJ est rectangle non isocèle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit *orthogonal*.

— Si le triangle OIJ n'est pas rectangle. Le repère est dit *oblique*.

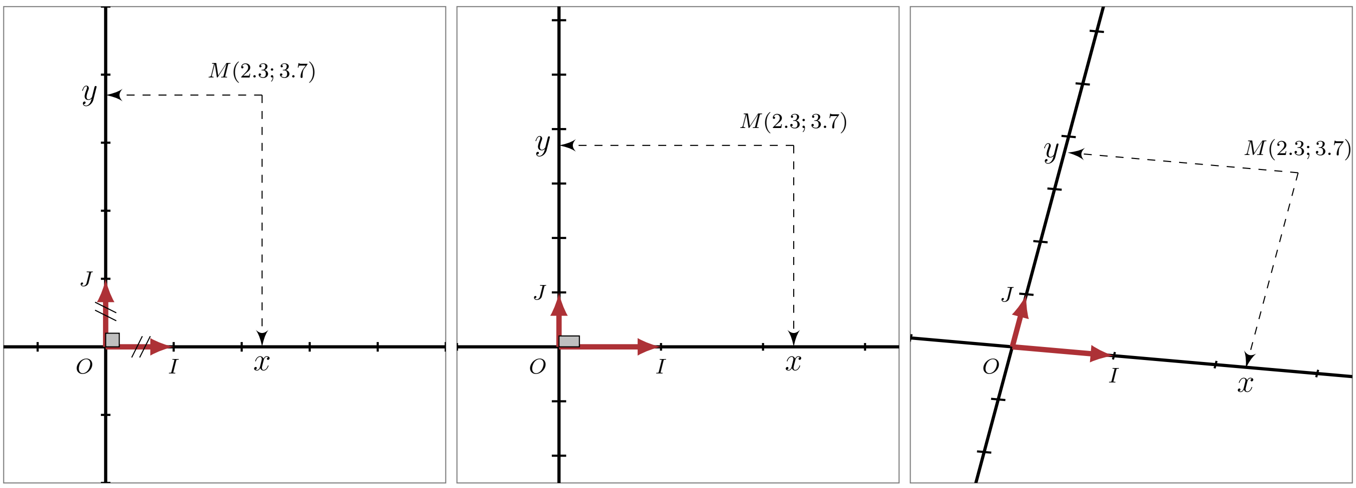


Figure 4.1 – Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le triangle OIJ est rectangle isocèle (gauche). Le repère $(O; I, J)$ est orthogonal si OIJ est rectangle mais pas isocèle (milieu). Les repères peuvent être obliques (droite).

4.2 Formule de la distance dans un repère orthonormé

Théorème 4.1 Dans le repère *orthonormé* $(O\ ;\ I, J)$ et les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

La longueur du segment AB est donnée par :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration.

Le repère est orthonormé et le triangle ABC est rectangle en C.

D'après théorème de Pythagore :

$AC = |x_B - x_A| \qquad BC = |y_B - y_A|$

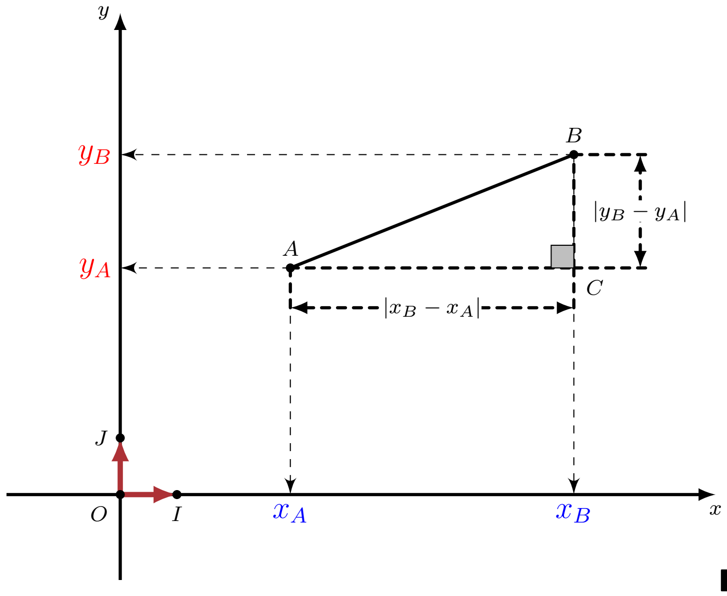
$AB^2 = AC^2 + CB^2$

$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$|a|^2 = a^2$



■

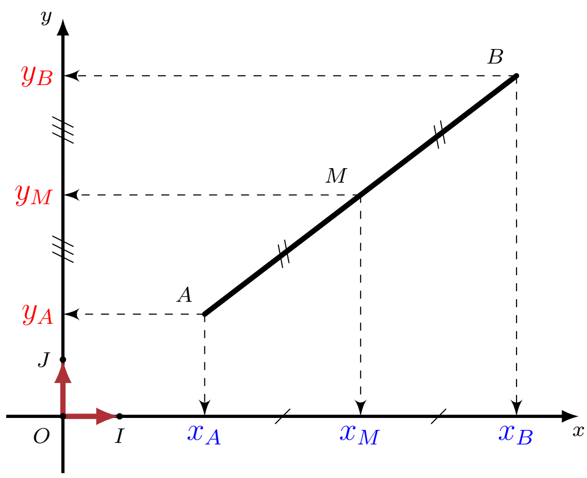
4.3 Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème 4.2 Dans le repère $(O\ ;\ I, J)$, les coordonnées du milieu $M(x_M; y_M)$ du segment $[AB]$ sont les *demi-sommes* des coordonnées des extrémités $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$(x_M\ ;\ y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

R Le théorème 4.2 est une conséquence du théorème de Thalès.

Le théorème reste valable dans un repère oblique.



4.4 Exercices

■ **Exemple 4.2** Déterminer la distance entre $A(6\ ;\ 3)$ et $B(8\ ;\ -2)$.

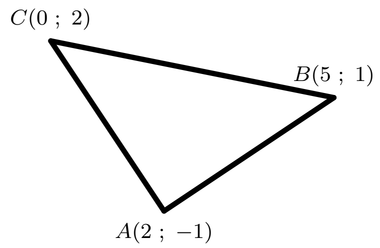
solution.
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(8-6)^2 + (3-(-2))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{4+25} \\ &= \sqrt{29} \text{ Unités de longueurs (U.L.)} \end{aligned}$$
■

Exercice 4.1

Déterminer les distances séparant les deux points données. Le repère est supposé orthonormé.

1. $A(2\ ;\ 6)$ et $B(3\ ;\ 3)$
2. $M(2\ ;\ 4)$ et $N(-1\ ;\ -3)$
3. $R(3\ ;\ -2)$ et $S(5\ ;\ -2)$
4. $W(-4\ ;\ 0)$ et $X(0\ ;\ 3)$
5. $C(-2\ ;\ 3)$ et $D(1\ ;\ 5)$
6. $O(0\ ;\ 0)$ et $P(-2\ ;\ 4)$
7. $T(0\ ;\ 3)$ et $U(2\ ;\ -1)$
8. $Y(-1\ ;\ -4)$ et $Z(-3\ ;\ 3)$
9. $E(1\ ;\ 5)$ et $F(-2\ ;\ 7)$

■ **Exemple 4.3 — nature d'un triangle.**



Soit $A(2\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ 1)$ et $C(0\ ;\ 2)$ dans un repère orthonormé

1. Déterminer, à l'aide de la formule de la distance, si le triangle ABC est équilatéral, isocèle non équilatéral où scalène.
2. Le triangle est-il rectangle ? Justifier.

solution.

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$; $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

   $= \sqrt{(5-2)^2 + (1-(-1))^2}$; $= \sqrt{(0-2)^2 + (2-(-1))^2}$; $= \sqrt{(0-5)^2 + (2-1)^2}$

   $= \sqrt{3^2 + 2^2}$; $= \sqrt{(-2)^2 + 3^2}$; $= \sqrt{(-5)^2 + 1^2}$

   $= \sqrt{13}$ U.L. ; $= \sqrt{13}$ U.L. ; $= \sqrt{26}$ U.L.

   $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A

2. Dans le triangle ABC, $[BC]$ est le plus grand côté :

BC^2	$AB^2 + AC^2$
$(\sqrt{26})^2$	$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2$
	$13 + 13$
26	26

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore. ■

Exercice 4.2

Classifier le triangle ABC parmi équilatéral, isocèle non équilatéral ou scalène.

1. $A(-1\ ;\ 0)$, $B(-2\ ;\ 3)$ et $C(-5\ ;\ 4)$
2. $A(0\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ -1)$ et $C(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$
3. $A(-2\ ;\ -4)$, $B(1\ ;\ 4)$ et $C(2\ ;\ -3)$
4. $A(0\ ;\ -4)$, $B(\sqrt{3}\ ;\ 1)$ et $C(3\sqrt{3}\ ;\ -5)$

Exercice 4.3

Utiliser la forme de la distance pour déterminer les triangles ABC rectangles. Vous indiquerez le sommet de l'angle droit.

1. $A(1\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ 2)$ et $C(7\ ;\ 3)$
2. $A(-2\ ;\ 3)$, $B(-5\ ;\ 4)$ et $C(1\ ;\ 2)$
3. $A(-1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 4)$ et $C(5\ ;\ 0)$
4. $A(5\ ;\ 4)$, $B(-4\ ;\ 6)$ et $C(-3\ ;\ 2)$

Exercice 4.4

Déterminer la nature du triangle ABC (les longueurs des côtés et la présence d'un angle droit).

1. $A(-4\ ;\ 5)$, $B(3\ ;\ 4)$ et $C(8\ ;\ -1)$
2. $A(2\ ;\ -5)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(-4\ ;\ -1)$
3. $A(-2\ ;\ 1)$, $B(-3\ ;\ 4)$ et $C(1\ ;\ 2)$
4. $A(\sqrt{3}\ ;\ -1)$, $B(0\ ;\ 2)$ et $C(-\sqrt{3}\ ;\ -1)$

■ **Exemple 4.4** Déterminer a sachant que $P(-2\ ;\ 4)$ et $Q(-1\ ;\ a)$ et $PQ = \sqrt{10}$.

solution. $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$, on a alors : $a - 4 = \pm 3$ ■

$$\sqrt{10} = \sqrt{((-1) - (-2))^2 + (a-4)^2}$$
$$10 = 1^2 + (a-4)^2$$
$$9 = (a-4)^2$$

$a = 4 + 3$ ou $4 - 3$

$a = 7$ ou 1

Exercice 4.5

On se place dans un repère orthonormé $O\ ;\ I\ ,\ J)$. Déterminer a dans chaque cas.

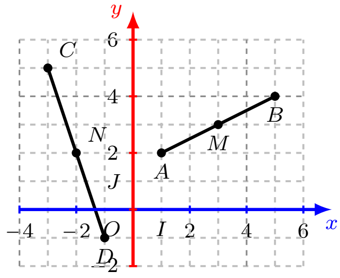
1. $P(2\ ;\ 1)$ et $Q(a\ ;\ -3)$ avec $PQ = 5$.
2. $P(a\ ;\ 6)$ et $Q(-2\ ;\ 1)$ avec $PQ = \sqrt{29}$.
3. $P(a\ ;\ a)$ et avec $OP = \sqrt{8}$.
4. $Q(3\ ;\ a)$, $A(-1\ ;\ 5)$, $B(6\ ;\ 4)$ avec $AQ = BQ$.

■ **Exemple 4.5**

Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$, avec $A(-1\ ;\ 3)$ et $B(5\ ;\ -2)$.

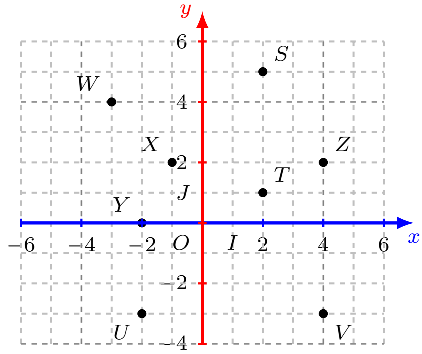
solution. $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+(-2)}{2} = \dfrac{1}{2}$. $\therefore M(2\ ;\ \frac{1}{2})$ ■

Exercice 4.6



1. Utiliser la formule de la distance pour vérifier que :
   a) M est le milieu de $[AB]$.
   b) N est le milieu de $[CD]$.
2. Utiliser la formule du milieu pour vérifier les réponses.

Exercice 4.7



Déterminer par lecture graphique les coordonnées du milieu des segments suivants :

1. $[ST]$
2. $[UV]$
3. $[WX]$
4. $[YZ]$
5. $[SV]$
6. $[UT]$
7. $[YT]$
8. $[TV]$

Exercice 4.8

Déterminer les coordonnées du milieu des segments reliant les paires suivantes :

1. $S(2\ ;\ 5)$ et $T(4\ ;\ 7)$
2. $U(1\ ;\ 6)$ et $V(4\ ;\ 2)$
3. $W(0\ ;\ 5)$ et $X(2\ ;\ 0)$
4. $Y(3\ ;\ -2)$ et $Z(3\ ;\ 2)$
5. $S(-1\ ;\ 4)$ et $V(2\ ;\ 2)$
6. $U(0\ ;\ -3)$ et $T(-2\ ;\ 5)$
7. $Y(-4\ ;\ -1)$ et $T(3\ ;\ -2)$
8. $Y(1\ ;\ 0)$ et $T(-6\ ;\ 8)$

Exercice 4.9

Soit le quadrilatère $ABCD$ tel que $A(-2\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ 2)$, $C(7\ ;\ 7)$ et $D(1\ ;\ 4)$.

1. Déterminer les coordonnées des milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
2. En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 4.10

Montrer que $FUNK$ est un parallélogramme sachant que $F(10;-8)$, $U(13;0)$, $N(24;9)$ et $F(21;1)$.

Exercice 4.11

Dans un repère orthonormé, soit les points $A(-2\ ;\ 9)$, $B(4\ ;\ 6)$, $C(1\ ;\ 0)$ et $D(-5\ ;\ 3)$.

1. Justifier que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Justifier à l'aide de la formule des longueurs que $ABCD$ est un rectangle.
3. Justifier à l'aide de la formule des longueurs que $ABCD$ est un carré.

Exercice 4.12

1. Calculer les coordonnées du milieu de $[PQ]$ sachant que $P(2;3)$, $Q(5;4)$.
2. Montrer que $R(4;5)$ appartient au cercle de diamètre $[PQ]$.

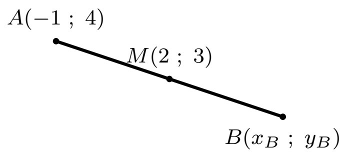
■ **Exemple 4.6**

$M(2\ ;\ 3)$ est le milieu de $[AB]$. Déterminer les coordonnées de B sachant que $A(-1\ ;\ 4)$.

solution. $B(x_B\ ;\ y_B)$ vérifie : $\dfrac{-1+x_B}{2}=2$ et $\dfrac{4+y_B}{2}=3$. $\therefore B(5\ ;\ 2)$ ■

$$-1+x_B=4 \qquad 4+y_B=6$$

$$x_B=5 \qquad y_B=2$$



Exercice 4.13

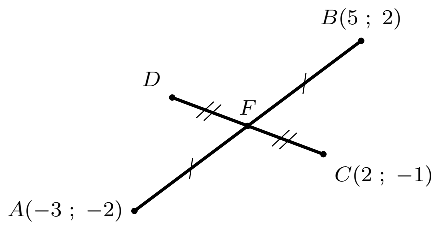
M est le milieu du segment $[AB]$. Déterminer les coordonnées de B dans chaque cas :

1. $A(1\ ;\ 3)$ et $M(2\ ;\ -1)$
2. $A(-2\ ;\ 1)$ et $M(-\frac{3}{2}\ ;\ 3)$
3. $A(0\ ;\ 0)$ et $M(2\ ;\ -\frac{1}{2})$
4. $A(2\ ;\ 1)$ et $M(0\ ;\ 2)$
5. $A(3\ ;\ -2)$ et $M(\frac{7}{2}\ ;\ -2)$
6. $A(-3\ ;\ \frac{1}{2})$ et $M(0\ ;\ 0)$

Exercice 4.14

Sur la figure ci-contre, F est le milieu des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les axes du repère ne sont pas tracés.

Déterminer les coordonnées de F et en déduire celles de D.



Exercice 4.15

$[AB]$ est le diamètre d'un cercle de centre $C(\frac{7}{2}\ ;\ -1)$. Déterminer A sachant que $B(2\ ;\ 0)$.

■ **Exemple 4.7 — déterminer le 4^e^ sommet d'un parallélogramme.**

Utiliser les coordonnées du milieu pour déterminer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$ sachant que $A(-3\ ;4)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(0\ ;\ -2)$.

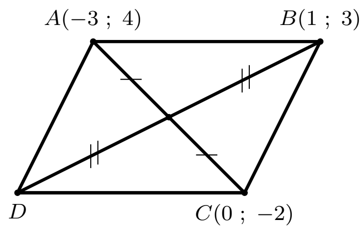
solution. (faire une figure à main levée)

$ABCD$ est un parallélogramme. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. $D(x_D\ ;\ y_D)$ vérifie :

$$\frac{1+x_D}{2}=\frac{-3+0}{2} \text{ et } \frac{3+y_D}{2}=\frac{4+(-2)}{2}. \therefore D(-4\ ;\ -1)$$ ■

$$1+x_D=-3 \qquad 3+y_D=2$$

$$x_D=-4 \qquad y_D=-1$$



Exercice 4.16 Déterminer les coordonnées du 4^e^ sommet du parallélogramme donné.

1. $ABCD$ est un parallélogramme avec $A(5\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ -2)$ et $C(8\ ;\ -3)$.
2. $WXYZ$ est un parallélogramme avec $W(-5\ ;\ 3)$, $Y(2\ ;\ 0)$ et $Z(-6\ ;\ -4)$.
3. $PQRS$ est un parallélogramme avec $P(-2\ ;-3)$, $Q(-1\ ;\ -2)$ et $S(1\ ;\ 0)$.
4. $PQRS$ est un parallélogramme avec $P(-1\ ;-4)$, $Q(1\ ;\ 1)$ et $R(4\ ;\ 2)$.