Chapitre 5

Inéquations linéaires

Table 5.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 5…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Intervalles de $\mathbb{R}$			
notation	5.1	5.2	
union et intersection d'intervalles		5.3, 5.4	
Résolution d'inéquations			
relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et règles opératoires		5.5, 5.6	5.7, 5.8
résolution d'inéquations linéaires	5.9, 5.10, 5.11	5.12, 5.13	
résoudre des inéquations de la forme $\|ax+b\| < c$.			5.14
Modéliser par une inéquation			
modéliser par des inéquations	5.15, 5.16	5.17	
application directes	5.18, 5.19	5.20, 5.21	5.21 5.22
inéquations avec paramètre		5.23 à 5.27	5.28 à 5.30
Club maths : Inéquations siumultanées et applications			

5.1 Les intervalles

■ Exemple 5.1

1. $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$ désigne l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tel que $3 \leqslant x \leqslant 5$.

   Il se note $I = [3; 5]$, à lire « intervalle fermé de 3 à 5 ».

2. $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$ désigne l'ensemble des réels x vérifiant $x \leqslant 4$.

   Il se note $J =]-\infty; 4]$, à lire « Intervalle de $-\infty$ à 4, fermé en 4 ».

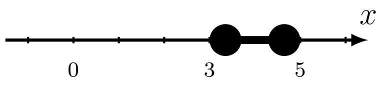


Figure 5.1 – $I = [3; 5]$

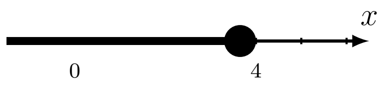


Figure 5.2 – $J =]-\infty; 4]$

Table 5.2 – Les différentes variantes d'intervalles bornés par a et $b \in \mathbb{R}$

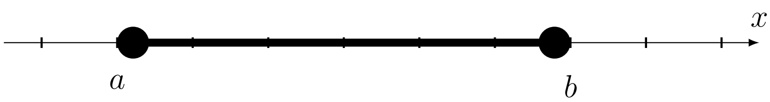
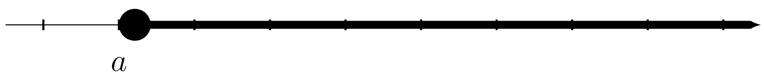
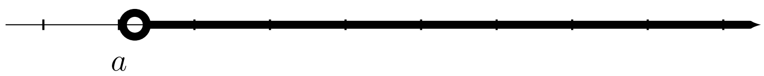
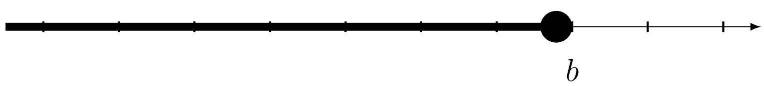
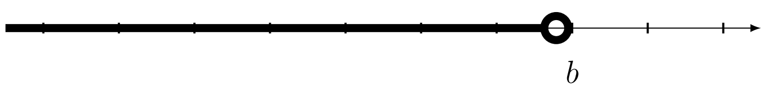
Intervalle	Inégalité	Représentation sur droite graduée
$x \in [a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$x \in]a; b[$	$a < x < b$	
$x \in [a; b[$	$a \leqslant x < b$	
$x \in]a; b]$	$a < x \leqslant b$	

Table 5.3 – Les différentes variantes d'intervalles infinis

Intervalle	Inégalité	Représentation sur droite graduée
$x \in [a; +\infty[$	$x \geqslant a$	
$x \in]a; +\infty[$	$x > a$	
$x \in]-\infty; b]$	$x \leqslant b$	
$x \in]-\infty; b[$	$x < b$	

5.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et opérations

Définition 5.1 — Comparer deux expressions a et b revient à étudier le signe de la différence.

Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$, a est supérieur à b s.s.i. la différence $(a-b)$ est positive :

$$a \geqslant b \iff (a-b) \geqslant 0$$

■ **Exemple 5.2**

$x^2 \geqslant y$	$2x \leqslant 5$	$5x - 1 < 0$	$\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$
$\iff x^2 - y \geqslant 0$	$\iff 2x - 5 \leqslant 0$	$\iff 5x < 1$	$\iff 0 < \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

Théorème 5.1 — L'addition. conserve l'ordre :

$$\text{Pour tout } a, b, n \in \mathbb{R} \text{ on a : } \quad (a \geqslant b) \quad \Rightarrow \quad (a+n \geqslant b+n)$$

Démonstration.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \geqslant b$.

Pour comparer $a+n$ et $b+n$ on cherchera le *le signe de la différence* :

$$\begin{aligned} (a+n)-(b+n) &= a+n-b-n = a-b \\ & \quad \textit{car } a \geqslant b \\ (a+n)-(b+n) &\geqslant 0 \\ & \quad \textit{la différence est positive} \\ a+n &\geqslant b+n \end{aligned}$$

■

Théorème 5.2 — la Multiplication. par un nombre *positif non nul* conserve l'ordre.

$$\text{Pour tout } a, b, p \in \mathbb{R} \text{ on a : } \quad a \geqslant b \quad \text{et } p > 0 \quad \Rightarrow \quad pa \geqslant pb$$

La multiplication par un nombre *négatif non nul* inverse l'ordre.

$$\text{Pour tout } a, b, n \in \mathbb{R} \text{ on a : } \quad a \geqslant b \quad \text{et } n < 0 \quad \Rightarrow \quad na \leqslant nb$$

Démonstration.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \geqslant b$. Soit $n < 0$ et $p > 0$ deux réels.

Comparer pa et pb avec le *signe de la différence* :

$$\begin{aligned} pa - pb &= p(a-b) \\ & \quad p > 0 \textit{ et } a - b \geqslant 0 \\ pa - pb &\geqslant 0 \\ & \quad \textit{la différence est positive} \\ pa &\geqslant pb \end{aligned}$$

■

5.3 Inéquations : vocabulaire

Définition 5.2

Une *inéquation à une inconnue* est une inégalité dans laquelle apparaît une lettre.

Une solution de l'inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

■ **Exemple 5.3**

Soit l'inéquation $4x+7<x^2$ d'inconnue x.

1. $x=0$ n'est pas solution de l'inéquation car l'égalité $4\times 0+7<0^2$ est ....
2. $x=6$ .... de l'inéquation, car $4\times 6+7<6^2$ est vraie.

■ **Exemple 5.4**

Soit l'inéquation $7x-12\geqslant x^2$ d'inconnue x.

$7(3)-12\geqslant(3)^2$ est .... $7(4)-12\geqslant(4)^2$ est ....

$7(5)-12\geqslant(5)^2$ est .... $7(10)-12\geqslant(10)^2$ est ....

.... sont des solutions de l'inéquation.

Définition 5.3

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ c'est trouver l'ensemble des solutions réelles.

R Soit l'inéquation $3x+4>2$, inconnue x. L'ensemble des solutions peut se noter directement $\mathscr{S}=\{x\in\mathbb{R}|3x+4>2\}$. L'objectif de ce chapitre est de simplifier l'écriture de tels ensembles, typiquement comme intervalles ou réunion d'intervalles.

Définition 5.4 Deux inéquations sont dites *équivalentes* (symbole $\iff$) si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de l'inconnue.

■ **Exemple 5.5**

1. Les inéquations $2x>1$ et $2x-1>0$ d'inconnue x sont équivalentes.
2. Les inéquations $x\leqslant 2$ et $x^2\leqslant 4$ ne sont pas équivalentes. En effet $x=-3$ et $x=-4$ sont des solutions de $x\leqslant 2$ mais pas des solutions de $x^2\leqslant 4$.

5.4 Règles de balancement

Théorème 5.3 — admis, propriétés des inéquations.

Appliquer les opérations suivantes à une inéquation donne une équation équivalente :

- *ajouter* aux *2 membres* d'une inéquation *une même* expression donne une inéquation équivalente.

$$\begin{aligned} & A > B \\ \iff & A + C >= B + C \end{aligned} \quad +C$$

- *multiplier* les *2 membres* d'une inéquation par *une même* expression *positive non nulle* donne une inéquation équivalente.

$$\begin{aligned} & A \leqslant B \\ \iff & PA \leqslant PB \end{aligned} \quad \times P, \text{ avec } P > 0$$

- *multiplier* les *2 membres* d'une inéquation par *une même* expression *négative non nulle* donne une inéquation équivalente à condition de *changer le sens du signe de l'inéquation*

$$\begin{aligned} & A < B \\ \iff & NA > NB \end{aligned} \quad \times N, \text{ avec } N < 0$$

■ **Exemple 5.6 — additions.**

$$\begin{aligned} & 15 > 4x + 3 \\ & 15 - 3 > 4x + 3 - 3 \\ \iff & 12 > 4x \end{aligned} \quad \text{ajouter } -3$$

$$\begin{aligned} & 3x + 5 \leqslant 17 - x \\ & 3x + 5 + x - 2 \leqslant 17 - x + x - 2 \\ \iff & 4x + 3 \leqslant 15 \end{aligned} \quad \text{ajouter } +x - 2$$

■ **Exemple 5.7 — multiplications.** on prendra soin vérifier les signes :

$$\begin{aligned} & 8x < 12 \\ & \frac{8x}{2} < \frac{12}{2} \\ \iff & 4x > 6 \end{aligned} \quad \div 2 > 0$$

$$\begin{aligned} & 4x + 3 < 15 \\ & 3(4x + 3) < 3(15) \\ \iff & 12x + 9 < 45 \end{aligned} \quad \times 3 > 0$$

$$\begin{aligned} & 2 - x < 10 \\ & -(2 - x) > -10 \\ \iff & x - 2 > -10 \end{aligned} \quad \times(-1) < 0$$

■ **Exemple 5.8 — non exemple.**

$$\begin{aligned} & x > 2x \\ \cancel{\iff} & \frac{x}{x} > \frac{2x}{x} \\ \iff & 1 > 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{diviser par } x \\ & \text{simplifier} \end{aligned}$$

impossible

Sans conditions sur le signe de x, la première implication est fausse. En effet tout nombre négatif vérifie l'inéquation $x > 2x$.

Ainsi, $x = -1$ est vérifie l'inéquation car $(-1) > 2(-1)$.

R Nous éviterons de multiplier des inégalités par des expressions de la forme $ax + b$, car cela nécessite de faire une disjonction de cas selon le signe de $ax + b$.

5.5 Exercices

5.5.1 Exercices : Intervalles

Exercice 5.1

Compléter par $\in$ ou $\notin$.

1.	$-5 \ \ldots \ [0;+\infty[$;	$3 \ \ldots \ ]-\infty;4[$;	$-3{,}1 \ \ldots \ [-4;-3]$;	$-5 \ \ldots \ ]-4;+\infty[$;
2.	$3 \ \ldots \ ]2;3]$;	$3 \ \ldots \ ]3;4]$;	$3 \ \ldots \ ]-\infty;3[$;	$0 \ \ldots \ ]-\infty;0]$;
3.	$\frac{17}{4} \ \ldots \ ]4;5[$;	$\frac{1}{4} \ \ldots \ \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$;	$-\frac{4}{5} \ \ldots \ [-5;-4]$;	$0{,}3 \ \ldots \ \left[\frac{1}{3};1\right[$;

Exercice 5.2

Compléter le tableau suivant :

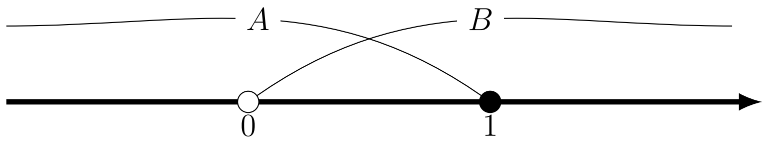
Intervalle	Inégalité(s)	Représentation	Phrase
$x \in [-3;5]$			
	$x < 3$		
			Intervalle de 4 à 6, fermé en 4 et ouvert en 6.
$x \in [2;+\infty[$			
	$-3 < x \leqslant -1$		
			Intervalle de $-\infty$ à 5, fermé en 5.
	$-3 \leqslant x \leqslant -1$		
	$5 \geqslant x > 1$		
	$x \geqslant -\frac{3}{4}$		
	$-4 > x > -7$		
	$5 \geqslant x > -3$		

Exemple 5.9 — Intersections et unions d'intervalles.

1. $A =]-\infty; 1]$ et $B =]0; +\infty[$.

   $A \cap B =]0; 1]$

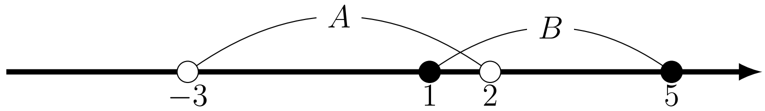
   $A \cup B =]-\infty; +\infty[$



2. $A =]-3; 2[$ et $B = [1; 5]$.

   $A \cap B = [1; 2[$

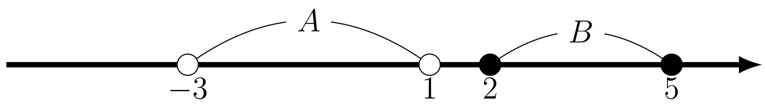
   $A \cup B =]-3; 5]$



3. $A =]-3; 1[$ et $B = [2; 5]$.

   $A \cap B = \emptyset$

   $A \cup B =]-3; 1[\cup [2; 5]$



Exercice 5.3

Pour chaque cas déterminez les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$

1. $A = [-10; 2[$ et $B = [-5; 3]$.

   $A \cap B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. $A =]-\infty; 2[$ et $B = [0; 5[$.

   $A \cap B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3. $A = [3; +\infty[$ et $B =]-\infty; 6[$.

   $A \cap B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4. $A =]-\infty; -2[$ et $B =]-4; 3[$.

   $A \cap B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. $A =]-4; 2]$ et $B = [2; 5]$.

   $A \cap B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6. $A = [-4; 2]$ et $B =]2; 5]$.

   $A \cap B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   $A \cup B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 5.4 — **entrainement.**

Déterminez les ensembles ci-dessous.

1. $[2;5] \cap [3;6[= \dots\dots\dots\dots$
2. $]-\infty;3] \cap [-7;10] = \dots\dots\dots\dots$
3. $[-5;2] \cup [0;5] = \dots\dots\dots\dots$
4. $[-2;0] \cap [4;5[= \dots\dots\dots\dots$
5. $[1;5] \cap [0;10[= \dots\dots\dots\dots$
6. $]-\infty;0] \cup [0;+\infty[= \dots\dots\dots\dots$
7. $]-\infty;0] \cap [0;+\infty[= \dots\dots\dots\dots$
8. $[-2;1] \cap [-5;0[\cap [-1;2[= \dots\dots\dots\dots$

5.5.2 Exercices : inégalités et relations d'ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 5.5 — **concepts.**

1. Choisir la(les) bonnes réponses :
   a) **propriété n° 1** Si (une expression (A) positive) (B) (négative) est (A) (ajoutée) (B) (soustraite) ou des deux membres d'une inégalité, le sens de l'inégalité reste inchangé.
   b) **propriété n° 2** Si les deux membres d'une inégalité sont (A) (multipliés) (B) (divisés) par une expression (A) (positive) (B) (négative) le sens de l'inégalité reste inchangé.
   c) **propriété n° 3** Si les deux membres d'une inégalité sont (A) (multipliés) (B) (divisés) par une expression (A) (positive) (B) (négative) le sens de l'inégalité est inversé.
2. Compléter par $<$, $>$, $\geqslant$ ou $\leqslant$ et préciser les opérations réalisées

a)
$a < b \Rightarrow a - b \dots\dots 0$ $\qquad$ $x \leqslant y \Rightarrow y - x \dots\dots 0$ $\qquad$ $a > 1 \Rightarrow a - 1 \dots\dots 0$ $\qquad$ $x \geqslant -2 \Rightarrow x \dots\dots\dots \geqslant 0$

b)
$x < y \xrightarrow{+\dots\dots} x + 2 \dots\dots y + 2$ $\qquad$ $-4x > 20 \xrightarrow{\times\dots\dots} x \dots\dots -5$ $\qquad$ $3x - 1 < 3 \xrightarrow{\dots\dots\dots} 3x \dots\dots 4$

c)
$x < 5 \xrightarrow{+\dots\dots} x - 3 \dots\dots 2$ $\qquad$ $x \leqslant -5 \xrightarrow{\dots\dots\dots} 3x \dots\dots\dots$ $\qquad$ $x \geqslant -2 \xrightarrow{\dots\dots\dots} -3x \dots\dots\dots$

d)
$-3x \geqslant -3y \xrightarrow{\dots\dots\dots} -12x \dots\dots -12y$ $\qquad$ $x \leqslant -2 \xrightarrow{\dots\dots\dots} -x \dots\dots$ $\qquad$ $a < 2b \xrightarrow{\times c,\ (c \dots 0)} ac > 2bc$

e)
$4x - 3 > 2y - 3 \xrightarrow{\dots\dots\dots} 4x \dots\dots 2y \xrightarrow{\dots\dots\dots} 2x \dots\dots y$

$x - 2y > x \xrightarrow{-x} -2y \dots\dots 0 \xrightarrow{\times\dots\dots} y \dots\dots 0$

$x < y \xrightarrow{\times\frac{-2}{3}} -\frac{2}{3}x \dots\dots -\frac{2}{3}y \xrightarrow{+1} -\frac{2}{3}x + 1 \dots\dots -\frac{2}{3}y + 1$

■ **Exemple 5.10 — utiliser un contre-exemple.**

Si A et B sont deux affirmations. Pour *réfuter* l'implication « Si A alors B », il faut proposer un *contre-exemple* pour lequel A est *vraie* et B est *fausse*.

L'implication « Si $a > b$ alors $ac^2 > bc^2$ est fausse. En effet, prenons $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$.

On vérifie : $a > b$ est *vraie* $(2 > 1)$, et $ac^2 > bc^2$ est *fausse* $(0 > 0)$

■ **Exemple 5.11**

On suppose $c \neq 0$. L'implication « Si $a > b$ alors $ac^2 > bc^2$ est vraie, car on multiplie les deux membres de l'inégalité par $c^2 > 0$.

Exercice 5.6

1. Compléter pour démontrer l'implication « Si $x < 3$ et $y < 2$ alors $x + y < 5$ ».

$$x < 3 \qquad\qquad y < 2$$

$$x - 3 < 0 \qquad\qquad y - 2 < 0$$

la somme de deux expression négatives est _ _ _ _ _ _ _ _

$$(x-3) + (y-2) \ldots 0$$

$$x + y - \ldots \;\; \ldots 0$$

$$x + y \ldots \;\; \ldots$$

2. L'implication « Si $x < 3$ et $y < 2$ alors $xy < 6$. » est fausse. Proposer un contre exemple.
3. L'implication « Si $x < 1$ alors $\dfrac{1}{x} > 1$. » est fausse. Proposer un contre exemple.

Exercice 5.7

Les implications suivantes sont fausses. Donner un contre-exemple pour chacune en proposant des valeurs judicieuses pour a, b et $c \in \mathbb{R}$.

1. Si $a < b$ alors $ac \leqslant bc$.
2. Si $a > 0$ alors $ab \leqslant b$.
3. Si $a \leqslant 0$ alors $ab \leqslant 0$.
4. Si $a^2 > 0$ alors $a > 0$.
5. Si $a^2 \geqslant a$ alors $a \geqslant 0$.
6. Si $a \geqslant 0$ alors $a^2 \geqslant a$.
7. Si $a \geqslant b$ alors $\dfrac{a}{b} \geqslant 1$.
8. Si $a < 1$ alors $a^2 < a$.

Exercice 5.8

Dire si l'implication est vraie ou fausse. Si fausse, proposer un contre-exemple.

1. Si $1 < x \leqslant 5$ alors $2 < 2x \leqslant 10$.
2. Si $-5 < x \leqslant 2$ alors $-2 < -x \leqslant 5$
3. Si $x > 1$ alors $x^2 > x$.
4. Si $x^2 > 4$ alors $x > 2$.
5. Si $x^2 \leqslant 4$ alors $x \leqslant 2$.
6. Si $x(x+1) > 0$ alors $x > 0$.
7. Si $x(x+1) > 5$ alors $x > 5$.
8. Si $ac^2 > bc^2$ alors $a > b$.

5.5.3 Exercices : résolution d'inéquations linéaires

Exemple 5.12 — isoler l'inconnue.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{aligned} & 3x+4>10 && \xrightarrow{-4} \\ \iff & 3x>6 && \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \\ \iff & \frac{3}{3}x>\frac{6}{3} \\ \iff & x>2 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]2;+\infty[$

$$\begin{aligned} & -2x-8\geqslant 10 && \xrightarrow{+8} \\ \iff & -2x\geqslant 18 && \xrightarrow{\times\frac{1}{-2}} \\ \iff & \frac{-2}{-2}x\leqslant\frac{18}{-2} \\ \iff & x\leqslant -9 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]-\infty;-9]$

$$\begin{aligned} & \frac{-3}{2}x-8\leqslant 10 && \xrightarrow{+8} \\ \iff & \ldots\ldots\ldots\ldots && \xrightarrow{\times\frac{2}{-3}} \\ \iff & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \iff & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=$

Exercice 5.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

(I_1) $x+1<9$	(I_5) $-x<8$	(I_9) $42x>0$
(I_2) $x-4>3$	(I_6) $-3-x>2$	(I_{10}) $14-6x\geqslant -10$
(I_3) $-6x\geqslant 30$	(I_7) $7<2x-11$	(I_{11}) $-\frac{6}{7}x-1{,}2<3{,}6$
(I_4) $-3x\leqslant -2$	(I_8) $-8x-5>0$	(I_{12}) $\frac{3}{2}x-1>4$

Exemple 5.13 — Encadrements.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{aligned} & -1< x+2< 5 && \\ & -2 \quad -2 \quad -2 && \xrightarrow{-2} \\ \iff & -3 < x < 3 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]-3;3[$

$$\begin{aligned} & -4> -2x\geqslant -10 && \\ & \frac{-4}{-2}< \frac{-2}{-2}x\leqslant \frac{-10}{-2} && \xrightarrow{\times\frac{1}{-2}} \\ & 2 < x \leqslant 5 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]2;5]$

$$\begin{aligned} & -5\leqslant -3x+7< 16 && \xrightarrow{-7} \\ & -12 \leqslant -3x < 9 && \xrightarrow{\times\frac{1}{-3}} \\ & \frac{-12}{-3} \geqslant \frac{-3}{-3}x > \frac{9}{-3} \\ & 4 \geqslant x > -3 \end{aligned}$$

$\mathscr{S}=]-3;4]$

Exercice 5.10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

(I_1) $-3<x-4<7$	(I_4) $2\leqslant 2x<10$	(I_7) $-3\leqslant 2x-1<1$
(I_2) $4<5x-4\leqslant 5$	(I_5) $-1\leqslant -x<3$	(I_8) $8<-2+3x<16$
(I_3) $-6\leqslant 3+x<4$	(I_6) $-3\leqslant 1-x<4$	(I_9) $4<2x-1\leqslant 10$

Exercice 5.11

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

   (I_1) $3x-18<30$ | (I_2) $11\geqslant 3x-2$ | (I_3) $10>23-3x>0$

2. Déterminer la plus petite solution entière de l'équation $35-2x<20$.

■ **Exemple 5.14**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{aligned} & 6x-6 \geqslant 3x+2 && \big) -3x+6 \\ \iff & 3x \geqslant 8 && \big) \times\tfrac{1}{3} \\ \iff & \frac{3}{3}x \geqslant \frac{8}{3} \\ \iff & x \geqslant \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left[\frac{8}{3};+\infty\right[$

$$\begin{aligned} & -3x-15 < -3(x+6) \\ \iff & -3x-15 < -3x-18 && \big) +3x \\ \iff & -15 < -18 \end{aligned}$$

impossible

$\mathscr{S} = \varnothing$

Exercice 5.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

(I_1) $3x > 2x+1$

(I_2) $12x \leqslant 8x+128$

(I_3) $x+5 < 10x$

(I_4) $3x+1 \geqslant 3(x+2)$

(I_5) $1-7x \leqslant 7+x$

(I_6) $5(x-1) > 4(2x-1)$

■ **Exemple 5.15**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante d'inconnue x :

$$\begin{aligned} & \frac{5x+9}{4} \geqslant \frac{5x+2}{6} && \big) \textit{ parenthèses autour des numérateurs} \\ \iff & \frac{(5x+9)}{4} \geqslant \frac{(5x+2)}{6} && \big) \times 12\textit{, multiplier par le dénominateur commun} \\ \iff & \frac{12(5x+9)}{4} \geqslant \frac{12(5x+2)}{6} && \big) \textit{ simplifier} \\ \iff & 3(5x+9) \geqslant 2(5x+2) && \big) \textit{ développer et réduire} \\ \iff & 15x+27 \geqslant 10x+4 && \big) -10x-27 \\ \iff & 5x \geqslant -23 && \big) \times\frac{1}{5} \\ \iff & x \geqslant \frac{-23}{5} \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left[\frac{-23}{5};+\infty\right[$

Exercice 5.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x

(I_1) $\dfrac{3x-2}{2} > \dfrac{x-1}{3}$

(I_2) $\dfrac{2x-5}{3} < \dfrac{6x-1}{4}$

(I_3) $\dfrac{3x-1}{4} - 1 \geqslant 0$

Exemple 5.16 — inéquations de la forme $|ax+b|<c$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} & |x| \leqslant 1 \\ \iff & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ & \mathscr{S} = [-1;1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x| < 1 \\ \iff & -1 < x < 1 \\ & \mathscr{S} =]-1;1[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x| \leqslant -1 \\ & \text{impossible} \\ & \mathscr{S} = \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x+2| \leqslant 1 \\ \iff & -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \\ \iff & -3 \leqslant x \leqslant -1 \qquad \downarrow -2 \\ & \mathscr{S} = [-3;-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |2x-3| \leqslant 0.5 \\ \iff & -0.5 \leqslant 2x-3 \leqslant 0.5 \\ \iff & 3-0{,}5 \leqslant 2x \leqslant 3+0{,}5 \qquad \downarrow +3 \\ \iff & 2{,}5 \leqslant 2x \leqslant 3{,}5 \\ \iff & 1{,}25 \leqslant x \leqslant 1{,}75 \qquad \downarrow \times\frac{1}{2} \\ & \mathscr{S} = [1{,}25;1{,}725] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |5x+1| \leqslant -5 \\ & \text{impossible} \\ & \mathscr{S} = \varnothing \end{aligned}$$

Exemple 5.17 — inéquations de la forme $|ax+b|>c$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} & |x| \geqslant 1 \\ \iff & x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -1 \\ & \mathscr{S} =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x| > 1 \\ \iff & x > 1 \text{ ou } x < -1 \\ & \mathscr{S} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x| \geqslant -1 \\ & \mathscr{S} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x+3| > 6 \\ \iff & x+3 > 6 \text{ ou } x+3 < -6 \\ \iff & x > 3 \text{ ou } x < -9 \\ & \mathscr{S} =]-\infty;-9[\cup]3;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |2x| \geqslant 10 \\ \iff & 2x \geqslant 10 \text{ ou } 2x \leqslant -10 \\ \iff & x \geqslant 5 \text{ ou } x \leqslant -5 \\ & \mathscr{S} =]-\infty;5] \cup [5;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x+3| \geqslant -3 \\ & \text{toujours vraie} \\ & \mathscr{S} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 5.14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, inconnue x :

1. (I_1) $|x| < 3$; (I_2) $|x| \leqslant 5$; (I_3) $|x| \geqslant 5$; (I_4) $|x| > 10$; (I_5) $|x| \leqslant -1$; (I_6) $|x| > -10$
2. (I_1) $|x+6| > 7$; (I_2) $|x+3| < 4$; (I_3) $|6x| < 12$; (I_4) $|-5x| > 10$; (I_5) $|x+5| < -2$; (I_6) $|-x| < 5$
3. (I_1) $|x| \leqslant 0$; (I_2) $|x| > 0$; (I_3) $|-3x| \geqslant 0$
4. (I_1) $\left|\frac{-1}{4}x\right| > 12$; (I_2) $|3x-5| > 10$; (I_3) $|5x+3| < 1$; (I_4) $|1+2x| \geqslant -1$; (I_5) $|1+2x| \leqslant -1$; (I_6) $|2x-5| < 7$

5.5.4 Exercices : modéliser par une inéquation

Exercice 5.15

Traduire les expressions suivantes par une inégalité :

1. « la somme de a et de $-b$ est strictement positive » ....
2. « la différence entre 8 et le double de y est positive ou nulle » ....
3. « la différence entre la moitié de x et de 3 est inférieure ou égale à -5 » ....
4. « la somme du carré de a et du carré de b est supérieure au produit de a et b. » ....

Exercice 5.16

Écrire une inégalité vérifiée par x dans les cas suivants :

1. Helga a 54 points au premier test Pix, et x points au second, sans valider le module. Pour valider, un élève doit avoir un total d'au moins 120 points sur 2 tests.......................
2. Harold a 65 € et met de côté 45 € chaque semaine grâce à son job d'été. Il peut acheter un vélo à au moins 310 € après x semaines. ....
3. Eugene a 50 € et met de côté 6 € par semaine. Lila n'a pas d'économies et met de côté 9 € par semaine. Après x semaines, Lila a plus d'économies que Eugene. ....
4. Arnold achète x cupcakes à 1.5 € pièce avec une partie de ses 18 €. ....
5. Rhonda utilise une partie de ses 71 € pour payer un trajet de x km en taxi. Son taxi prend 5 € de frais de service et 3 € par km de trajet. ....
6. Un enclos est de 108 m^2 accueuille x cochons. La loi impose d'avoir au minimum 12m^2 d'espace par cochon dans un enclos. ....

Exercice 5.17

Un groupe de x enfants se partage les mêmes jouets. Si chaque enfants reçoit 4 jouets, il en restera 27. Si chaque enfant en prend 5, il n'en aura pas assez.

Ecrire une inéquation en x et déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 5.18

Sachant que $\dfrac{2(2x-3)}{3}$ est positif, déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 5.19 — bis.

Sachant que $\dfrac{1-2x}{5}$ n'est pas inférieur à $3x+2$. Déterminer les valeurs possibles de x.

Exercice 5.20

Déterminer les entiers négatifs non nuls solutions de l'inéquation $3x+6 > -3$.

Exercice 5.21 — bis.

Déterminer les entiers positifs non nuls solutions de l'inéquation $3x - 5 > 5x - 13$.

Exercice 5.22

La plus petite solution entière de l'inéquation $4(x-3)+5 < 6(x-2)+1$, inconnue x, est aussi solution de l'équation $4x - ax = 3$. Déterminer la valeur de a.

Exercice 5.23

$x = 3$ est une solution de l'inéquation $mx^2 - 5x + 3m - 1 \leqslant 0$, inconnue x. Déterminer une inéquation vérifiée par m est en déduire les valeurs possibles de m.

Exercice 5.24 — bis.

$x = -2$ est une solution de l'inéquation $x^3 + 3mx \geqslant 1 - 2m$, inconnue x. Déterminer une inéquation vérifiée par m est en déduire les valeurs possibles de m.

Exercice 5.25

Soit l'équation $5x = m - 11$, inconnue x.

1. Exprimer x en fonction du parametre m.
2. Sachant que la solution pour x est positive non nulle, déterminer les valeurs possibles du paramètre m.

Exercice 5.26 — bis.

Soit l'équation $5x - 2m = -x + 5$, inconnue x. Sachant que la solution pour x est supérieure ou égale à 1, déterminer les valeurs possibles de m

Exercice 5.27 — bis.

Soit l'équation $(1-m)x = 1 - 2x$, inconnue x. Sachant que la solution pour x est un nombre strictement négatif, déterminer les valeurs possibles pour m.

Exercice 5.28

Soit l'inéquation $2x - a \geqslant 0$, inconnue x. Sachant que $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ sont des solutions entières, déterminer les valeurs possibles pour a.

Exercice 5.29

Soit l'inéquation $(a-3)x > a - 3$, inconnue x. Sachant que l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-\infty; 1[$, déterminer la valeur de a.

Exercice 5.30

Soit l'inéquation $\dfrac{ax-5}{6} - \dfrac{2-ax}{4} > 0$, inconnue x. Sachant que l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]1; +\infty[$, déterminer les valeurs possibles de a.