Chapitre 6
Calcul avec les radicaux

Table 6.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 6…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Signification de l'ecriture et résolution d'équations quadratiques simples			
signification de l'écriture $\sqrt{a}$		6.1, 6.2	
domaine de définition d'une expression avec radicaux		6.3	
résoudre des équations quadratiques simples $ax^2 = c$ et $(x+b)^2 = c$		6.4	6.7
résoudre des équations se ramenant à $\sqrt{x} = k$		6.5	6.6
Opérations d'addition, multiplication et quotient de radicaux			
simplifier à l'aide de $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	6.8, 6.9	6.10, 6.11	
réduire des sommes, multiplier des expressions	6.12	6.13, 6.14, 6.15	
utiliser $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	6.16	6.17	6.18
rendre rationnel le dénominateur d'une fraction		6.19, 6.20	
utiliser le conjugué pour simplifier des fractions		**??**	
Club maths : puissances et multiplications de radicaux			

6.1 La racine carrée

Définition 6.1 Pour tout réel $a > 0$. Il existe deux nombres réels dont le carré vaut a :

- le nombre **positif** noté $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, c'est « la racine carrée de a ».
- et son opposé $-\sqrt{a} = -a^{\frac{1}{2}}$

Exemple 6.1

(R) à retenir : pour tout $a > 0$ on a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$

Proposition 6.1 $\sqrt{x} = b$ signifie $x \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $x = b^2$.

Proposition 6.2 Soit l'équation $x^2 = a$, inconnue x.

1. Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$.
2. Si $a = 0$, l'équation admet une solution unique $x = \sqrt{0} = 0$.
3. Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solutions réelles.

Théorème 6.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa racine carrée $\sqrt{n}$ est égale à un entier ou un irrationnel.

Exemple 6.2

1. $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{225} = 15 \ldots$
2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ ...

(R) Objectif de ce chapitre est d'apprendre à simplifier les écritures de sommes, de produits et de quotients d'expression de la forme $a + b\sqrt{c}$, avec a, b et c des entiers.

6.2 Propriétés de la racine carrée

Proposition 6.4 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt{a^2} = |a|$

Démonstration. les deux nombres a et $-a$ ont un carré égal à a^2 : $(a)^2 = (-a)^2$.

Si $a > 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$.

Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$. ∎

Exemple 6.3 $\left(3^2\right)^{0,5} = \sqrt{3^2} = 3$ et $\left((-3)^2\right)^{0,5} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Théorème 6.5 Pour tout réels positifs non nuls a et $b > 0$:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. *de la 1re égalité, au programme*

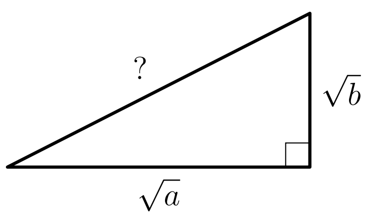
- $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$ car produit de $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$.
- $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ est un nombre positif, dont le carré vaut ab. Or $\sqrt{ab}$ désigne l'**unique** nombre positif dont le carré vaut ab. Donc on a $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Démontrer la 2e égalité. ∎

Théorème 6.6 Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, on a l'inégalité $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration. Illustration géométrique du théorème.



∎

6.3 Exercices

Exercice 6.1 — concepts. Complétez. Plusieurs réponses sont possibles.

1. Le nombre positif dont le carré est 12 s'écrit ....

   Le nombre négatif dont le carré est 25 s'écrit ....

   Il existe .... nombre(s) dont le carré est 7. Le plus petit s'écrit ....
2. L'expression $\sqrt{\pi - 4}$ est (A) non définie (B) bien définie

   L'expression $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ est (A) non définie (B) bien définie
3. Si $x = -\sqrt{6}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x^2 = 6$ (C) $x^2 = -6$

   Si $x = \sqrt{-6^2}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x = -6$ (C) $x = 6$

   Si $x = \sqrt{9^2}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x = 3$ (C) $x = 9$

   Si $x = \sqrt{(-9)^2}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x = -9$ (C) $x = 9$
4. Si $x^2 = 10$ et $x < 0$ alors (A) $x = \sqrt{10}$ (B) $x = \sqrt{-10}$ (C) $x = -\sqrt{10}$ (D) $(-x)^2 = 10$

   Si $x^2 = 36$ alors on a (A) $x = 6$ (B) $|x| = 6$ (C) $-x^2 = 36$ (D) $(-x)^2 = 36$
5. L'équation $x^2 + 5 = 0$, inconnue x, admet

   (A) aucune solution réelle (B) une solution unique (C) deux solutions distinctes

   L'équation $x^2 = 3$, inconnue x, admet :

   (A) aucune solution réelle (B) une solution unique (C) deux solutions distinctes
6. L'expression $\sqrt{3x}$ a un sens lorsque (A) $x \geqslant 3$ (B) $x \leqslant 3$ (C) $3x \geqslant 0$ (D) $x \geqslant 0$

   L'expression $\sqrt{-2x}$ est définie lorsque .... $\geqslant 0$, donc pour ....

   L'expression $\sqrt{x-2}$ est définie lorsque .... $\geqslant 0$, donc pour ....
7. Si $\sqrt{-a} = b$ est vraie, alors (A) $a = -b^2$ (B) $a = b^2$

   Si $a^2 = 2b$ est vraie, alors (A) $a \geqslant 0$ (B) $b \geqslant 0$ (C) $|a| = \sqrt{2b}$ (D) $|a| = 2\sqrt{b}$

   Si $5\sqrt{a} = b$ est vraie, alors (A) $a \geqslant 0$ (B) $b \geqslant 0$ (C) $5a = b^2$ (D) $25a = b^2$
8. Si $\sqrt{x^2} = x$ alors x peut vérifier (A) $x > 0$ (B) $x = 0$ (C) $x < 0$

   Si $\sqrt{x^2} = -x$ alors x peut vérifier (A) $x > 0$ (B) $x = 0$ (C) $x < 0$

Exercice 6.2 — . Compléter lorsque c'est possible les équations suivantes.

$\sqrt{36} =$	$(\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2 = 5$	$\left(-\sqrt{12}\right)^2 =$ ....
$-\sqrt{64} =$	$\sqrt{3}^2 =$	$\left(10\sqrt{2}\right)^2 =$ ....
$\sqrt{-9} =$	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} =$	$\left(2\sqrt{10}\right)^2 =$ ....
$\sqrt{100} =$	$-\sqrt{10}^2 =$	$\left(\ldots\ldots\sqrt{2}\right)^2 =$ ...... $\sqrt{2}^2 = 98$

■ Exemple 6.4 — domaine de définition d'une expression.

Déterminer le domaine de définition des expressions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ est définie pour $2x+1 \geqslant 0$. Donc $x \geqslant \dfrac{-1}{2}$. Le domaine est $D = [-\frac{1}{2}; +\infty[$.
2. $f(x) = \sqrt{1-3x}$ est définie pour $1-3x \geqslant 0$. Donc $x \leqslant \dfrac{1}{3}$. Le domaine est $D =]-\infty; \frac{1}{3}]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est définie pour $x+1 > 0$. Donc $x > -1$. Le domaine est $D =]-1; +\infty[$

Exercice 6.3

Déterminer le domaine de définition des expressions suivantes :

1. $A = \sqrt{x-1}$
2. $B = \sqrt{10-x} + 3x$
3. $C = 3\sqrt{-x} + 7$
4. $D = \dfrac{1}{\sqrt{3x+10}} - 10x$

Exercice 6.4 — révision.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant le terme carré :

(E_1) $5x^2 = 4 - 3x^2$ | (E_2) $3(x+4)^2 - 75 = 0$ | (E_3) $2(x-3)^2 = 16$ | (E_4) $(x-5)^2 = 20 - 10x$

■ Exemple 6.5 — Résoudre équations et inéquations en isolant la racine.

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} = 3 \\ \iff &x = 3^2 \\ &\mathscr{S} = \{9\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\sqrt{x} = -2 \\ &\text{impossible} \\ &\mathscr{S} = \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-9\sqrt{x} - 15 = -69 \\ \iff &-9\sqrt{x} = -54 \\ \iff &\sqrt{x} = 6 \\ \iff &x = 6^2 = 36 \quad \mathscr{S} = \{36\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4\sqrt{x+2} = 12 \\ \iff &\sqrt{x+2} = 3 \\ \iff &x+2 = 3^2 \\ \iff &x = 7 \quad \mathscr{S} = \{7\} \end{aligned}$$

Exercice 6.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant la racine.

(E_1) $\sqrt{x} = 9$

(E_2) $5\sqrt{x} = -6$

(E_3) $5\sqrt{x} = 0$

(E_4) $7 - 4\sqrt{x-1} = -9$

(E_5) $-2\sqrt{x+3} - 15 = -21$

(E_6) $5\sqrt{x+2} + 6 = 16$

Exercice 6.6

L'équation $\sqrt{x-1} = a+4$ d'inconnue x admet des solutions réelles.

1. Justifier que $a \geqslant -4$.
2. Exprimer x en fonction de a.

Exercice 6.7

L'équation $(x+1)^2 = 2b$ d'inconnue x admet des solutions réelles.

1. Déterminer les valeurs possibles de b.
2. Exprimer x en fonction de a.

■ **Exemple 6.6 — Carrés parfaits à connaitre.** de collège.

$1^2 =$; $\sqrt{} = 1$	$6^2 =$; $\sqrt{} = 6$	$11^2 =$; $\sqrt{} = 11$
$2^2 =$; $\sqrt{} = 2$	$7^2 =$; $\sqrt{} = 7$	$12^2 =$; $\sqrt{} = 12$
$3^2 =$; $\sqrt{} = 3$	$8^2 =$; $\sqrt{} = 8$	$13^2 =$; $\sqrt{} = 13$
$4^2 =$; $\sqrt{} = 4$	$9^2 =$; $\sqrt{} = 9$	$14^2 =$; $\sqrt{} = 14$
$5^2 =$; $\sqrt{} = 5$	$10^2 =$; $\sqrt{} = 10$	$15^2 =$; $\sqrt{} = 15$

Exercice 6.8 — 🖩. Corriger, si nécessaire, les égalités suivantes :

1. $\sqrt{36} = \sqrt{6}$ ....
2. $\sqrt{49}^2 = \sqrt{7}$ ....
3. $\sqrt{5}^2 = 25$ ....
4. $\sqrt{10} = 5$ ....
5. $\sqrt{-9^2} = 9$ ....
6. $\sqrt{(-1)^2} = -1$ ....
7. $\sqrt{8^2} + \sqrt{6^2} = \sqrt{100}$ ....
8. $\sqrt{81} + \sqrt{9} = \sqrt{90}$ ....

Pour $a, b > 0$, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

■ **Exemple 6.7 — Simplifier : Écrire une expression avec le terme sous la racine le plus petit possible.**

$A = \sqrt{12}$

identifier le plus grand carré facteur de 12

$= \sqrt{4(3)}$

utiliser $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= \sqrt{4}\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

$B = \sqrt{75}$

$= \sqrt{25(\quad)}$

$= \sqrt{25}\sqrt{}$

$= 5\sqrt{}$

$C = 2\sqrt{18}$

$= 2\sqrt{9(\quad)}$

$= 2\sqrt{9}\sqrt{}$

$=$

Exercice 6.9 — 🖩. Complétez par des entiers, afin de rendre les égalités vraies.

$\sqrt{8} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{32} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{27} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{50} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{48} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{200} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{288} = \sqrt{144}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{98} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{36}\sqrt{2} = \square\sqrt{\square}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = 15\sqrt{2}$

$\sqrt{\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square} = 8\sqrt{5}$

$\sqrt{900} =$ ....

$\sqrt{8100} =$ ....

$\sqrt{2500} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{49 \times 10^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sqrt{160} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{25 \times 10^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 6.10 — . Complétez par des entiers, afin de rendre les égalités vraies.

$\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\dfrac{25}{100}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{\square}{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{2}{3}$
$\sqrt{0{,}36} = \sqrt{\dfrac{36}{100}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{\square}{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{5}{7}$
$\sqrt{1{,}96} = \sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{\square}{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\sqrt{\dfrac{\square}{\square}} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}} = \dfrac{5^2}{7^3}$

Exercice 6.11 — . Déterminer $\sqrt{a}$ et comparer avec a dans chaque cas.

1. $a = 0{,}16$	2. $a = 1{,}21$	3. $a = 0{,}64$	4. $a = 2{,}25$

■ **Exemple 6.8** Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$, ou $a \in \mathbb{Z}$, et $b \in \mathbb{N}$ est le plus petit possible.

$A = \sqrt{2} \times 3$

$= 3\sqrt{2}$

mettre la racine après le coefficient

$C = 3\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$= 3\sqrt{6}$

utiliser l'identité $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$B = 3\sqrt{50} = 3\sqrt{25(2)}$

$= 3\sqrt{25}\sqrt{2}$

$= 3(5)\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

utiliser l'identité $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$D = (2\sqrt{3}) \times (5\sqrt{12})$

$= (2\sqrt{3}) \times (5\sqrt{4}\sqrt{3})$

$= 20\sqrt{3}\sqrt{3} = 20(3) = 60$

Exercice 6.12 — . Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$, ou $a \in \mathbb{Z}$, et $b \in \mathbb{N}$ est le plus petit possible.

$A = \sqrt{7}\sqrt{5}$	$D = 2\sqrt{48}$	$G = (5\sqrt{2}) \times (2\sqrt{12})$	$J = (3\sqrt{20})(2\sqrt{18})$
$B = \sqrt{5}(5)$	$E = 5\sqrt{63}$	$H = (5\sqrt{21})(2\sqrt{3})$	$K = (7\sqrt{2})^2$
$C = \sqrt{5}\sqrt{2}$	$F = 10\sqrt{8}$	$I = (2\sqrt{8})\sqrt{27}$	$L = (2\sqrt{5})^3$

■ **Exemple 6.9 — Réduire des sommes de radicaux.** Réduire les expressions suivantes :

$A = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

comme pour réduire $x + 3x$

$C = 5\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 5$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B = \sqrt{27} + 5\sqrt{3}$

$= \sqrt{9}\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

simplifier les racines

$D = 2\sqrt{27} - 5\sqrt{12} = \ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 6.13 — . Réduire et simplifier les sommes suivantes :

$A=\sqrt{3}+\sqrt{3}$	$D=\sqrt{12}-5\sqrt{27}$	$G=7\sqrt{8}+3\sqrt{2}$	$J=\sqrt{27}-2\sqrt{3}$
$B=\sqrt{5}+\sqrt{10}$	$E=2\sqrt{80}-3\sqrt{20}$	$H=\sqrt{12}-\sqrt{10}$	$K=(10+4\sqrt{7})-(2+\sqrt{7})$
$C=\sqrt{45}-\sqrt{20}$	$F=9\sqrt{7}+\sqrt{63}$	$I=\sqrt{15}+\sqrt{20}$	$L=(2\sqrt{2}+8)-(\sqrt{2}+1)$

■ **Exemple 6.10** Développer, simplifier et réduire les produits suivants :

$$(\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+5)=\sqrt{3}\sqrt{6}-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-10=\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2}-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-10=3\sqrt{2}-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-10$$

$$(\sqrt{8}+3)(\sqrt{2}-1)=\sqrt{8}\sqrt{2}-\sqrt{8}+3\sqrt{2}-3=\sqrt{16}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3=4-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3=\sqrt{2}+1$$

Exercice 6.14 — . Développer, simplifier et réduire les produits suivants :

$A=3(4+\sqrt{2})$	$D=(\sqrt{7}+3)(\sqrt{3}+5)$	$G=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)$
$B=\sqrt{3}(4+\sqrt{3})$	$E=(7\sqrt{11}-9)(3+8\sqrt{11})$	$H=(\sqrt{8}-\sqrt{12})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$
$C=\sqrt{3}(\sqrt{12}+2\sqrt{3})$	$F=(6\sqrt{6}-8)(2+9\sqrt{6})$	$I=(4\sqrt{5}-\sqrt{2})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

Exercice 6.15 — . Développer à l'aide d'indentités remarquables les produits suivants :

$A=(-2\sqrt{5}-5)^2$	$B=(3+\sqrt{11})(3-\sqrt{11})$	$C=(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

Exercice 6.16 — **communiquer.**

$$\begin{aligned} & x^2=(x-2)^2 \\ \iff & \sqrt{x^2}=\sqrt{(x-2)^2} \\ \iff & x=x-2 \\ \iff & 0=-2 \quad \text{impossible} \end{aligned}$$

La conclusion de la résolution de Jim est $\mathscr{S}=\varnothing$.

Jean-luc fait remarquer que $x=1$ est pourtant une solution !

Expliquer l'erreur de Jim dans la résolution.

Exercice 6.17 — . Simplifier à l'aide de $\sqrt{a^2}=|a|$ les racines de carrés suivantes :

$A=\sqrt{5^2}$	$C=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$	$E=\sqrt{(1-\pi)^2}$
$B=\sqrt{(-5)^2}$	$D=\sqrt{\left(\sqrt{10}-9\right)^2}$	$F=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$

■ **Exemple 6.11** — **simplifier des expressions de la forme $\sqrt{a\pm 2b\sqrt{c}}$.**

1. Développer, simplifier et réduire $(3-\sqrt{10})^2$.
2. En déduire une forme simplifiée de l'écriture $\sqrt{19-6\sqrt{10}}$.

solution.

$$(3-\sqrt{10})^2=(3)^2-2(3)(\sqrt{10})+(\sqrt{10})^2$$

$$\therefore (3-\sqrt{10})^2=19-6\sqrt{10}$$

$$\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$$

$\sqrt{a^2}=|a|$

$$|3-\sqrt{10}|=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$$

⚠ $3-\sqrt{10}<0$

$$-(3-\sqrt{10})=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sqrt{19-6\sqrt{10}}=-3+\sqrt{10}$$

■

Exercice 6.18 — **un grand classique.**

1. Développer simplifier et réduire $(3+5\sqrt{2})^2$. En déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$.
2. Développer simplifier et réduire $(2-\sqrt{5})^2$. En déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.
3. Développer simplifier et réduire $(3-2\sqrt{5})^2$. Que pouvez vous en conclure ?

■ **Exemple 6.12** — **simplifier des quotients de racines en rendant rationnel le dénominateur.**

$$\begin{aligned} A &= \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} && \text{rendre rationnel le dénominateur}\\ &= \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} && \text{simplifier les produits de racines}\\ &= \frac{7\sqrt{10}}{3(5)}\\ &= \frac{7\sqrt{10}}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{4(3)}}\\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}}\\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sqrt{28}}{5\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{4(7)}}{5\sqrt{4(3)}} && \text{simplifier les radicaux}\\ &= \frac{2\sqrt{7}}{5(2)\sqrt{3}} && \text{rendre rationnel le dénominateur}\\ &= \frac{\sqrt{7}}{5\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} && \text{simplifier les produits de racines}\\ &= \frac{\sqrt{21}}{15} \end{aligned}$$

Exercice 6.19 — . Simplifier les quotients en rendant rationel le dénominateur :

$A = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ | $B = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$ | $C = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$ | $D = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$ | $E = \dfrac{14}{3\sqrt{7}}$ | $F = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ | $G = \dfrac{\sqrt{12}}{2\sqrt{5}}$ | $H = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

■ **Exemple 6.13** Si le dénominateur d'une fraction est de la forme $A+B\sqrt{C}$, on peut rendre rationel le dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par le **conjugué** $A-B\sqrt{C}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{2}} &= \frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}\\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{5}-2} &= \frac{4}{(\sqrt{5}-2)}\frac{(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)}\\ &= \frac{4\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}^2-2^2}\\ &= \frac{4\sqrt{5}+8}{5-4}\\ &= 4\sqrt{5}+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{6}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}\\ &= \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2}\\ &= \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{3}\\ &= 2\sqrt{5}+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 6.20 — . Simplifier en rendant rationel le dénominateur. Montrer les calculs.

$A = \dfrac{1}{5-\sqrt{3}}$ | $C = \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ | $E = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ | $G = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

$B = \dfrac{3}{2-\sqrt{5}}$ | $D = \dfrac{15}{\sqrt{7}-5}$ | $F = \dfrac{3}{7-4\sqrt{3}}$ | $H = \dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

à retenir Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction :

- si le dénominateur est un produit ayant pour facteur $\sqrt{a}$, alors on multiplie par $\sqrt{a}$.
- si le dénominateur est de la forme $a\pm\sqrt{b}$ (ou $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$) alors on multipliera par le conjugué.