Chapitre 8

Fonctions de référence

Objectifs

Pour les 5 fonctions de référence (les fonctions affines, la fonction carrée, la fonction cube, la fonction racine carrée et la fonction inverse) il faut :

— Connaitre la définition, déterminer une image.

— Connaitre les propriétés des représentations graphiques.

— Connaître et utiliser le sens de variation pour déterminer le meilleur encadrement possible d'une image $f(x)$.

— Déterminer les antécédents d'un réel k et résoudre une équation de la forme $f(x) = k$.

— Résoudre par lecture graphique une inéquation de la forme $f(x) \geqslant k$.

Préliminaires

Lemme 8.1 — Identités remarquables avec des cubes.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \tag{8.1}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \tag{8.2}$$

Démonstration.

Retrouver les identités 8.2 en substituant b par $-b$ dans les identités 8.1

■

8.1 Les fonctions affines

Définition 8.1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *affine* s'il existe m et $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + c$$

Le *terme constant* c est l'*ordonnée à l'origine* de f (c.à.d. l'image de 0 par f) : $f(0) = c$.

Le coefficient m du *terme linéaire* « mx » s'appelle *taux d'accroissement*. Il vérifie :

(i) Si $m > 0$ alors f est *strictement croissante*

(ii) Si $m < 0$ alors f est *strictement décroissante*

(iii) Si $m = 0$ alors f est constante.

Démonstration.

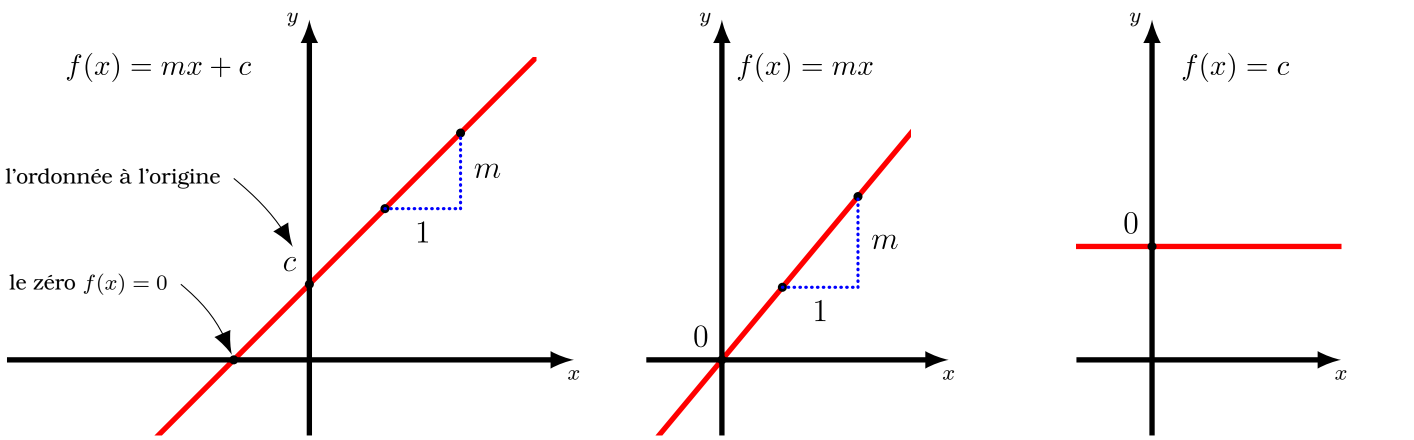
$$f(a) - f(b) = (ma + c) - (mb + c) = ma - mb = m(a - b)$$

■

Théorème 8.2 — admis.

La représentation graphique de la fonction affine f de taux d'accroissement m et de terme constant c est la *droite non verticale* $\mathscr{D}_f$ de *coefficient directeur* m et d'*ordonnée à l'origine* c.

La droite $\mathscr{D}_f$ est d'*équation réduite* $\mathscr{D}_f : y = mx + c$.



(a) fonction affine non linéaire et non constante: pour tout x, $f(x+1) - f(x) = m$

(b) fonction *affine et linéaire* $m \neq 0$ et $c = 0$

(c) fonction *affine et constante* $m = 0$ et $c \neq 0$

R Si $m = 0$ et $c = 0$, la fonction est dite *fonction nulle* (affine, linéaire et constante).

Propriété 8.3 — tableau de signe d'une fonction affine non constante.

Le tableau de signe d'une fonction affine d'expression $f(x) = mx + c$ ($m \neq 0$) est :

x	$-\infty$		*le zéro*		$+\infty$
$f(x) = mx + c$		signe de $-m$	0	signe de m	

Démonstration.

— Si $m > 0$ alors f est *strictement croissante* et positive pour x supérieur au zéro de f.

— Si $m < 0$ alors f est est *strictement décroissante* et négative pour x supérieur au zéro de f.

■

■ **Exemple 8.1 — Dresser le tableau de signe d'une fonction affine non constante.**

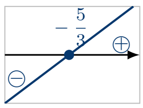
Dresser le tableau de signe des fonctions affines suivantes.

a) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 3x + 5$ b) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

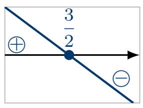
solution.

$f(x) = 0$ $3x + 5 = 0$ $x = -\frac{5}{3}$	*recherche du zéro*	$g(x) = 0$ $-\frac{2}{3}x + 1 = 0$ $x = \frac{3}{2}$
$m = 3 > 0$	*préciser le signe du taux d'accroissement*	$m = -\frac{2}{3} < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x) = 3x + 5$		$-$	0	$+$	



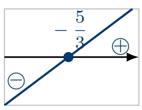
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g(x) = -\frac{2}{3}x + 1$		$+$	0	$-$	



■

R Multiplier une fonction affine par un facteur strictement positif ne modifie le tableau de signe. Ainsi le tableau de signe de $f(x) = \frac{3x+5}{2}$ est aussi :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x) = \frac{3x+5}{2}$		$-$	0	$+$	

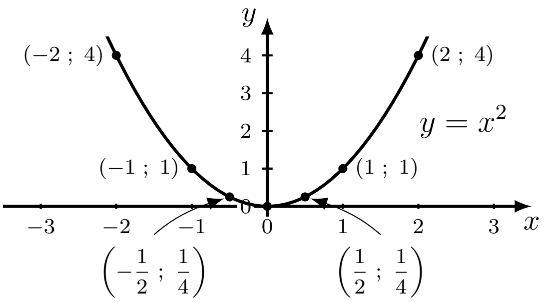


8.2 La fonction carrée

Définition 8.2 La *fonction carré* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Sa représentation graphique est la *parabole* d'équation $\mathscr{P} : y = x^2$.

La fonction carré est une fonction *paire* : l'axe des ordonnées l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$.



(a) Parabole $\mathscr{P} : y = x^2$ de sommet $O(0\ ;\ 0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$
Signe de x^2	$+$	0	$+$

(b) Tableaux de variation et de signe de la fonction carré

Propriété 8.4

La fonction carré est *strictement décroissante* sur $]-\infty; 0]$ et *strictement croissante* sur $[0; -\infty[$.

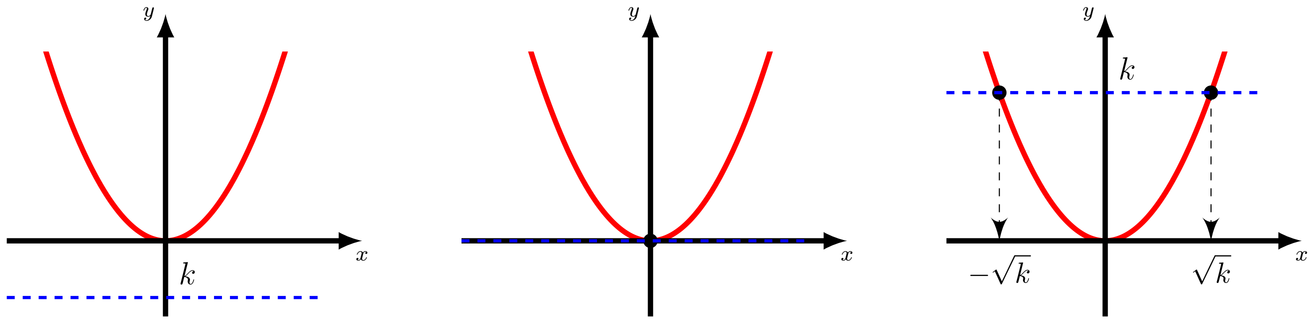
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$: si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$; si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$

Démonstration, exigible en fin de seconde.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

■

Figure 8.3 – Résolution graphique de l'équation $x^2 = k$ inconnue x, selon les valeurs de k.



(a) $k < 0$, pas de solution $\mathscr{S} = \varnothing$ **(b)** $k = 0$, solution unique $\mathscr{S} = \{0\}$ **(c)** $k > 0$, $\mathscr{S} = \{-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}\}$

Définition 8.3 — racine carrée.

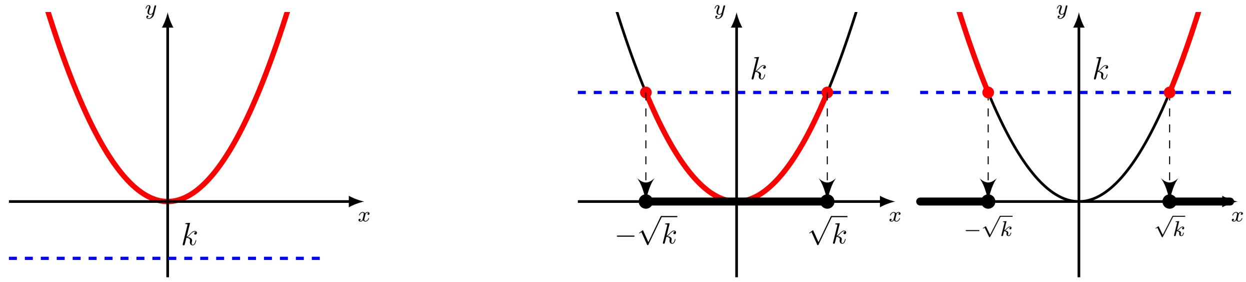
La *racine carrée* de $k \geqslant 0$ est l'unique réel *positif* noté $\sqrt{k}$ ou $k^{\frac{1}{2}}$ dont le *carré* vaut k :

$$\left(\sqrt{k}\right)^2 = k \qquad \left(k^{\frac{1}{2}}\right)^2 = k$$

$\sqrt{k}$ est l'antécédent *positif* de k par la fonction carré.

$\sqrt{k}$ et l'unique solution *positive* de l'équation $x^2 = k$.

Figure 8.4 – Résolution graphique des inéquations $x^2 \geqslant k$ et $x^2 \leqslant k$ inconnue x, selon les valeurs de k

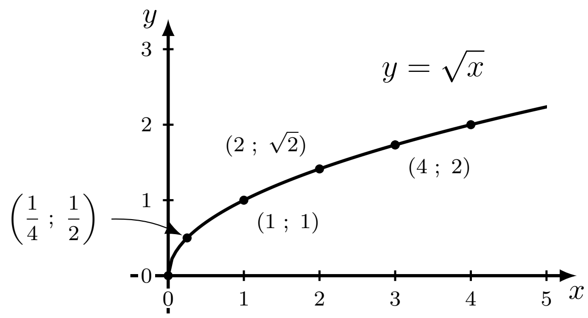


(a) **Cas** $k < 0$
$x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution : $\mathscr{S} = \varnothing$
$x^2 \geqslant k$ est toujours vraie : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$

(b) **Cas** $k > 0$,
L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution $\mathscr{S} = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution $\mathscr{S} =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$

8.3 La fonction racine carrée

Définition 8.4 La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



(a) Représentation de la fonction racine carrée $y = \sqrt{x}$

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$
Signe de $f(x)$	0	$+$

(b) Tableaux de variation et de signe de la fonction racine carrée. desmos.com/calculator/om0ozhtyjw

Propriété 8.5 La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\text{Si} \quad 0 \leqslant a < b \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Démonstration, exigible en fin de seconde.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\qquad}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\qquad}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

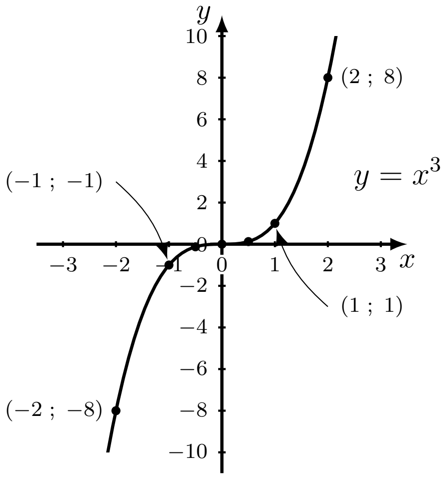
■

8.4 La fonction cube

Définition 8.5 La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Sa représentation graphique est la *cubique* d'équation $\mathscr{C} : y = x^3$.

La fonction cube est une fonction *impaire* : $O(0\ ;\ 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$



(a) Cubique d'équation $y = x^3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

(b) Tableaux de variation et de signe de la fonction cube

Propriété 8.6 La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad a < b \quad \text{alors} \quad a^3 < b^3$$

Démonstration.

$$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

■

Définition 8.6 — racine cubique.

La *racine cubique* de $k \in \mathbb{R}$ est l'unique réel noté $\sqrt[3]{k}$ ou $k^{\frac{1}{3}}$ dont le cube vaut k :

$$\left(\sqrt[3]{k}\right)^3 = k \qquad \left(k^{\frac{1}{3}}\right)^3 = k$$

$\sqrt[3]{k}$ est l'antécédent de k par la fonction cube et l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 = k$.

■ **Exemple 8.2**

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ et $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $2^3 = 8$ et $(-2)^3 = 8$
2. $\sqrt[3]{5^{12}} = 5^4$ car $\left(5^4\right)^3 = 5^{12}$. Il est pratique d'écrire $\left(5^{12}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{12}{3}} = 5^4$.

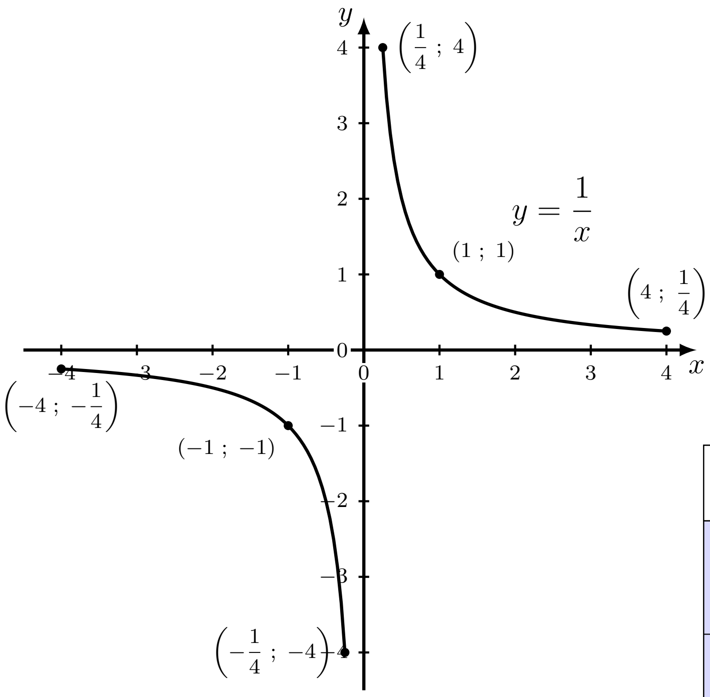
8.5 Fonction inverse

Définition 8.7 — fonction inverse.

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Sa représentation graphique est une *hyperbole* d'équation $\mathscr{H} : y = \dfrac{1}{x}$.

La fonction inverse est une fonction *impaire* : $O(0\ ;\ 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{H}$



(a) Hyperbole $\mathscr{H} : y = \dfrac{1}{x}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$
signe de $\dfrac{1}{x}$	$-$	$+$

(b) Tableaux de variation et de signe de la fonction inverse.

Propriété 8.7 La fonction est strictement décroissante sur $]0; -\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$:

si	$a < b < 0$	si	$0 < a < b$
alors	$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$	alors	$0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Démonstration, exigible en fin de seconde.

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\quad}{ab} - \frac{\quad}{ab} = \frac{\qquad}{ab}$$

■

8.6 Exercices

8.6.1 Exercices : fonctions affines

Exercice 8.1 — **concepts.** Compléter.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression réduite $f(x) = 3x + 5$
   a) f une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire .
   b) Le terme linéaire est .... Le terme constant est ....
   c) Le taux de (A) agrandissement (B) évolution (C) accroissement de f est ....
   La fonction f est strictement (A) croissante (B) décroissante .
   d) L'image de 0 est $f(\ldots) =$ ....
   e) Le zéro de la fonction f, solution de ...., est $x =$ ....
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression réduite $g(x) = \sqrt{5}x$
   a) g est une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire
   (D) affine et constante .
   b) L'ordonnée à l'origine est ....
   c) Le taux de .... est ....
   d) La fonction g est (A) strictement croissante (B) strictement décroissante
3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x+5) =$ ....
   a) L'expression développée réduite de h est $h(x) =$ ....
   b) h est une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire .
   c) Le terme constant est ....
   d) Le taux .... de h est ....
   e) L'ordonnée à l'origine est : ....
   f) Le zéro de la fonction h, solution de ...., est $x =$ ....
   g) La représentation graphique de h est une droite $\mathscr{D}_h$ .... de pente ...
   — elle a pour équation réduite ....
   — elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées : ....
   — elle coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées : ....
4. Soit la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (2x+1)^2$.
   a) La forme développée réduite est $p(x) =$ ....
   b) p est une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire .

5. Soit u la fonction affine de taux de variation $-\frac{2}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 1.
   a) L'expression réduite de u est ....
   b) La fonction u est (A) strictement croissante (B) strictement décroissante
   c) La représentation graphique D_u de u est une droite .... de pente ....
   d) L'image de zéro par u est ....

      Le zéro de u est la solution de .... $x =$ ....
   e) D_u coupe l'axe des abscisses au point .... et l'axe des ordonnées au point ....

Exercice 8.2

Pour chacune des fonctions suivantes, simplifier si nécessaire l'expression et déterminer s'il s'agit d'une fonction affine non linéaire ou affine et linéaire. Vous préciserez alors les valeurs du taux d'accroissement et de l'ordonnée à l'origine.

1. $f: x \mapsto -2x+5$
2. $f: x \mapsto (x+6)^2$
3. $f: x \mapsto -4x$
4. $f: x \mapsto \dfrac{x}{2}+8$
5. $f: x \mapsto x^2+1$
6. $f: x \mapsto \dfrac{2}{3x}$
7. $f: x \mapsto x^2-(x+2)(x-3)$
8. $f: x \mapsto -2x^{-1}$

Exercice 8.3 — imaginer une fonction.

1. Donner deux exemples de fonctions affines de taux d'accroissement 3.
2. Donner deux exemples de fonctions affines d'ordonnée à l'origine 3.
3. Donner deux exemples de fonctions affines tel que l'image $f(x)$ soit proportionnelle à $x+3$.
4. Donner une deux exemples de fonctions affines tel que $f(x)-2$ est proportionnelle à $x-7$.

   Que vaut $f(7)$ dans chaque cas ?
5. Donner deux exemples de fonctions affines non constantes f tel que $f(3)=7$.
6. Donner deux exemples de fonctions affines non constantes f dont le zéro est 3.

Exercice 8.4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+a-1$.

1. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est constante.
2. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est linéaire.
3. Déterminer a sachant que $f(3)=0$. En déduire l'ordonnée à l'origine dans ce cas.
4. Déterminer a sachant que $f(0)=5$. En déduire le taux de variation de f.

Exercice 8.5

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(k-1)x+k^2-1$.

1. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles f est affine et linéaire.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle f est linéaire non nulle.

Exercice 8.6 — Utiliser le sens de variation d'une fonction affine.

Compléter et comparer les images par f dans les cas suivants. Ne pas calculer les valeurs numériques des images.

1. $\frac{7}{2} \ldots\ldots \frac{3}{2}$

   $f\left(\frac{7}{2}\right) \ldots\ldots f\left(\frac{3}{2}\right)$

   $-3\left(\frac{7}{2}\right)+6 \ldots\ldots -3\left(\frac{3}{2}\right)+6$

   $f : x \mapsto -3x+6$ *est* .... *sur* $\mathbb{R}$

2. $-5 \ldots\ldots -3$

   $f(-5) \ldots\ldots f(-3)$

   $9(-5)-10 \ldots\ldots 9(-3)-10$

   $f : x \mapsto 9x-10$ *est* .... *sur* $\mathbb{R}$

3. $x \geqslant \ldots\ldots$

   $12-3x \ldots\ldots 0$

   $f : x \mapsto 12-3x$ *est* .... *sur* $\mathbb{R}$

4. $-1 > x \geqslant \ldots\ldots$

   $f(-1) \ldots\ldots \frac{2x}{3}+1 \ldots\ldots -1$

   $f : x \mapsto \frac{2x}{3}+1$ *est* .... *sur* $\mathbb{R}$

Exercice 8.7

Pour chacune des fonctions affines données par son expression :

(i) Déterminer le zéro de la fonction.

(ii) Donner le taux d'accroissement m, et préciser son signe

(iii) Construire le tableau de signe de la fonction.

1. a) $f(x)=2x+3$ | b) $f(x)=-5x+9$ | c) $f(x)=x-3$
2. a) $f(x)=\frac{1}{5}x+1$ | b) $f(x)=-\frac{3}{5}x-2$ | c) $f(x)=\frac{3}{7}x-2$
3. a) $f(x)=2(5-x)$ | b) $f(x)=-2(x+1)$ | c) $f(x)=\frac{-3x+8}{4}$
4. a) $f(x)=\frac{5x}{3}+1$ | b) $f(x)=\frac{4x+3}{5}$ | c) $f(x)=1-\frac{10x}{7}$

Exercice 8.8

Pour chaque tableau de signe donner deux fonctions affines qui correspondent :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{3}{11}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

8.6.2 Exercices : fonction carré

Exercice 8.9 — concepts : calculer les images et antécédents par une fonction carré.

1. La fonction carrée est définie sur .... par ....
2. L'image de $-\sqrt{6}$ par la fonction f est ....
3. $f(10^{-3}) =$ .... $f\left(\dfrac{7}{13}\right) =$ .... $f(2\sqrt{3}) =$ ....
4. Les antécédents de 10 par f sont ....
5. La valeur .... a un unique antécédent par la fonction f.
6. Lorsque .... alors l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solutions.
7. $f(1-\sqrt{2}) =$ ....
8. $f(x+1) =$ ....
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) =$ .... La fonction carrée est ....

■ Exemple 8.3 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré pour encadrer a^2.

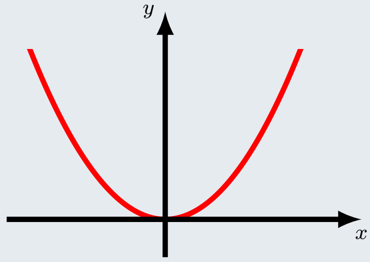
Encadrer au mieux a^2 dans les cas suivants :

1. $2\sqrt{3} < a \leqslant 4$

$0 < 2\sqrt{3} < a \leqslant 4$ *$x \mapsto x^2$ est croissante*

$(2\sqrt{3})^2 < a^2 \leqslant 4^2$ *sur $[0;+\infty[$*

$\therefore 12 < a^2 \leqslant 16$

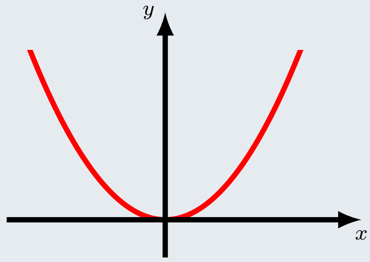


2. $a < -3$

$a < -3 < 0$ *$x \mapsto x^2$ est décroissante*

$a^2 > (-3)^2$ *sur $]-\infty;0]$*

$\therefore a^2 > 9$



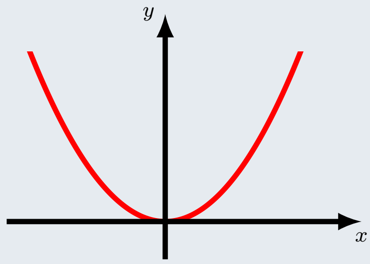
3. $-5 < a \leqslant 3$ *disjonction des cas $a > 0$ et $a < 0$*

$-5 < a \leqslant 0$ ou $0 \leqslant a < 3$ *$x \mapsto x^2$ est décroissante sur*

$(-5)^2 > a^2 \geqslant 0$ ou $0 \leqslant a < 3^2$ *$]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$*

$25 > a^2 \geqslant 0$ ou $0 \leqslant a < 9$

$\therefore 0 \leqslant a^2 < 25$



Exercice 8.10

1. Compléter pour encadrer au mieux a^2 dans les cas suivants :

   a) Si $a > 3\sqrt{2}$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* $[0;+\infty[$

   a^2 ......

   a^2 ......

   b) Si $-2 < a \leqslant 0$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* $]-\infty;0]$

   ......a^2......

   ......a^2......

   c) Si $-5 \leqslant a < -2$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   ......a^2......

   ......a^2......

   d) Si $3\sqrt{2} < a < 2\sqrt{7}$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   ......a^2......

   ......a^2......

   e) Si $a < -5$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   a^2 ......

   a^2 ......

   f) Si $0 \geqslant a > b$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   ......a......

   g) $a < \quad b \quad < -2$ — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   ....

   h) Si $a \leqslant$ ...... — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   $a^2 \geqslant 10$

   i) Si ....$a \geqslant$ ...... — $x \mapsto x^2$ *est* .... *sur* ....

   $0 < a^2 \leqslant 4$

2. À l'aide d'une disjonction de cas, encadrer au mieux a^2 dans les cas suivants :

   a) $-5 \leqslant a \leqslant 2$

   b) $-2 < a \leqslant 3$

3. Vrai ou Faux? Justifier. **Affirmation** « Si $a < 2$ alors $a^2 < 4$. »

4. Que pouvez vous dire sur a^2 si $a > -5$?

■ **Exemple 8.4** Donner un encadrement de $f(x) = -2(x+3)^2 + 1$ lorsque $-6 < x \leqslant -4$.

solution.

$$\begin{array}{rcll}
-6 < & x & \leqslant -4 & \\
 & & & +3 \\
-3 < & x+3 & \leqslant -1 & \\
 & & & x \mapsto x^2 \textit{ est strictement décroissante sur } [-\infty; 0] \\
9 > & (x+3)^2 & \geqslant 1 & \\
 & & & \times(-2) \\
-18 > & -2(x+3)^2 & \geqslant -2 & \\
 & & & +1 \\
-17 > & -2(x+3)^2+1 & \geqslant -1 &
\end{array}$$

■

Exercice 8.11

Encadrer au mieux $f(x)$ dans les cas suivants.

1. $7 \leqslant x < 12$ et $f(x) = 2x^2 - 1$
2. $-6 \leqslant x < -3$ et $f(x) = -2x^2 - 1$
3. $-7 \leqslant x < 3$ et $f(x) = 3(x+8)^2 - 4$.
4. $-7 \leqslant x < 1$ et $f(x) = -5(x-2)^2 + 2$

■ **Exemple 8.5 — résoudre une inéquation de la forme $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$.**

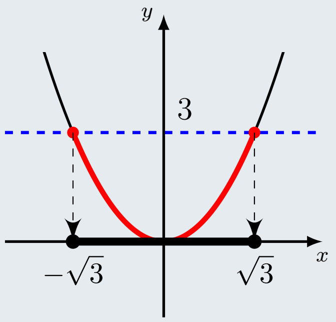
À l'aide de la représentation graphique de la fonction carré, résoudre les inéquations :

$x^2 + 5 \leqslant 8$

$\iff x^2 \leqslant 3$

$\iff -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$

$\therefore \quad \mathscr{S} = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

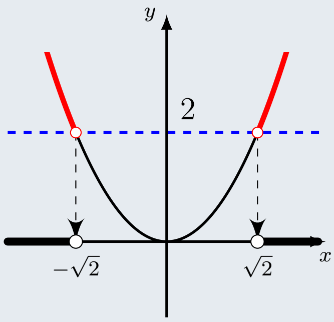


$3x^2 > 6$

$x^2 > 2$ *isoler le carré*

$\iff x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

$\therefore \quad \mathscr{S} =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

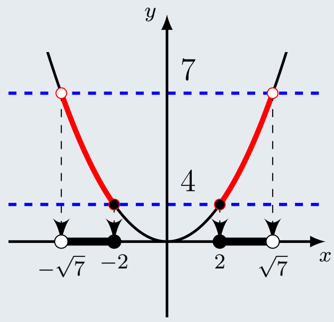


$12 > 2x^2 - 2 \geqslant 6$

$\iff 14 > 2x^2 \geqslant 8$

$\iff 7 > x^2 \geqslant 4$

$\therefore \quad \mathscr{S} =]-\sqrt{7}; -2] \cup [2; \sqrt{7}[$



Exercice 8.12

Isoler le terme au carré puis donner les solutions des inéquations suivantes d'inconnue x en traçant systématiquement la représentation de la fonction carré à main levée.

1. a) $x^2 \geqslant 3$
   b) $x^2 < 9$
   c) $-2 < x^2$
   d) $5 \leqslant x^2 \leqslant 49$
   e) $12 < x^2 < 18$
   f) $0 < x^2 \leqslant 27$
2. a) $2 - 5x^2 \geqslant 1$
   b) $3x^2 - 2 < 13$
   c) $9 \geqslant -16 + 5x^2 > 0$

8.6.3 Exercices : fonction racine carrée

Exercice 8.13 — révision.

Simplifier :

1. $\sqrt{(-3)^4 \times 4^{-5}}$
2. $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}$
3. $(2\sqrt{3}-3)^2$
4. $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$

Exercice 8.14 — révision.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant $\sqrt{x}$.

(E_1) $\sqrt{x}=9$

(E_2) $\sqrt{x}=-6$

(E_3) $7-4\sqrt{x}=-9$

(E_4) $-2\sqrt{x}-15=-21$

(E_5) $9\sqrt{x}-15=-69$

(E_6) $\sqrt{x-5}+3=10$

Exemple 8.6 — Résoudre une inéquation en isolant $\sqrt{x}$. Le domaine de résolution est ici $x \in [0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &\leqslant 2 \\ 0 \leqslant x &\leqslant 2^2 \\ 0 \leqslant x &\leqslant 4 \\ \therefore \mathscr{S} &= [0;4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &> 5 \\ x &> 5^2 \\ x &> 25 \\ \therefore \mathscr{S} &=]25;+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x}+3 &< 15 && \quad -3 \\ 4\sqrt{x} &< 12 && \quad \times\frac{1}{4} \\ \sqrt{x} &< 3 \\ 0 \leqslant x &< 3^2 = 9 \\ \therefore \mathscr{S} &= [0;9[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3\sqrt{x}-8 &\leqslant 1 && \quad +8 \\ -3\sqrt{x} &\leqslant 9 && \quad \times\frac{1}{-3} \\ \sqrt{x} &\geqslant -3 \\ \therefore \mathscr{S} &= [0;+\infty[\end{aligned}$$

Exercice 8.15

Résoudre les inéquations suivantes en isolant $\sqrt{x}$.

1. $\sqrt{x} < -9$
2. $\sqrt{x} \geqslant 4$
3. $2\sqrt{x} \leqslant 20$
4. $5\sqrt{x}-5 < 25$
5. $3\sqrt{x}-6 > 0$
6. $-8\sqrt{x}+5 \leqslant 11$

Exemple 8.7 — variante.

$$\begin{aligned} -5\sqrt{x+3}-6 &\geqslant -16 && \quad +6 \\ -5\sqrt{x+3} &\geqslant -10 && \quad \times\frac{1}{-5} \\ \sqrt{x+3} &\leqslant 2 && \quad \textit{Domaine de résolution } x+3 \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x+3 &\leqslant 2^2 && \quad -3 \\ -3 \leqslant x &\leqslant 1 \\ \therefore \mathscr{S} &= [-3;1] \end{aligned}$$

Exercice 8.16

Résoudre les inéquations suivantes en isolant $\sqrt{x}$.

1. $\sqrt{x-1} \leqslant 3$
2. $\sqrt{2x-1} > 4$
3. $-6\sqrt{x+2}+3 \geqslant -21$

8.6.4 Exercices : fonction cube

Exercice 8.17 — **cubes à connaître.**

1. Calculer les cubes des entiers suivants : 1, -1, 2, 3, -3, 4, 5 et 6.
2. Sans calculs supplémentaires, déterminer les solutions des équations suivantes :

   a) $x^3 = 1$ | b) $x^3 = -8$ | c) $x^3 = 125$ | d) $x^3 = \frac{-8}{27}$

3. Sans calculs supplémentaires, simplifier :

   a) $\sqrt[3]{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | b) $\sqrt[3]{64} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | c) $\sqrt[3]{-27} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | d) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \ldots\ldots\ldots$

Exercice 8.18 — **Utiliser le sens de variation de la fonction cube.**

1. Compléter pour encadrer au mieux a^3 dans les cas suivants :

Si $a \geqslant -5$
$a^3 \ldots\ldots$ $\qquad x \mapsto x^3$ *est* $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *sur* $\ldots\ldots$
$a^3 \ldots\ldots$

Si $-2 > a \geqslant -5$
$\ldots\ldots a^3 \ldots\ldots$ $\qquad x \mapsto x^3$ *est* $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *sur* $\ldots\ldots$
$\ldots\ldots a^3 \ldots\ldots$

Si $a < -2$
$a^3 \ldots\ldots$ $\qquad x \mapsto x^3$ *est* $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *sur* $\ldots\ldots$
$a^3 \ldots\ldots$

Si $2 \leqslant a \leqslant 5$
$\ldots\ldots a^3 \ldots\ldots$ $\qquad x \mapsto x^3$ *est* $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *sur* $\ldots\ldots$
$\ldots\ldots a^3 \ldots\ldots$

2. Encadrer au mieux a^3 dans les cas suivants :

   a) $-5 < 2a \leqslant 1$ | b) $5a - 1 \leqslant 1$ | c) $5 > -3a - 1 > 1$

■ **Exemple 8.8** — **Résoudre équations et inéquations en isolant x^3.**

$x^3 = 27$
$x = \sqrt[3]{27}$
$x = 3$
$\therefore \mathscr{S} = \{3\}$

$x^3 < 2$
$x < \sqrt[3]{2}$
$\therefore \mathscr{S} =]-\infty; \sqrt[3]{2}[$

$x^3 \geqslant -8$
$x \geqslant \sqrt[3]{-8}$
$x \geqslant -2$
$\therefore \mathscr{S} = [-2; +\infty[$

$3x^3 + 12 \geqslant 204$ $\quad -12$
$3x^3 \geqslant 192$ $\quad \times \frac{1}{3}$
$x^3 \geqslant 64$
$x \geqslant \sqrt[3]{64} = 4$
$\therefore \mathscr{S} = [4; +\infty[$

Exercice 8.19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes en isolant x^3.

1. a) $2x^3 = 18$ | b) $10x^3 + 8 = -632$ | c) $-9x^3 - 1 = 575$
2. a) $x^3 > 9$ | c) $3x^3 > 375$ | e) $-9x^3 - 1 < 575$

   b) $x^3 \leqslant 27$ | d) $2x^3 - 14 > -30$ | f) $-27 > x^3 \geqslant -64$

8.6.5 Exercices : Fonction inverse

Exercice 8.20 — **révision.**

Simplifier $\dfrac{1}{a}$ dans les cas suivants (éliminer les radicaux des dénominateurs).

1. $a = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$ | **2.** $a = 0{,}01$ | **3.** $a = \sqrt{3} - 2$ | **4.** $a = 5^3$

Exercice 8.21 — **révision.**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les équations suivantes.
   a) $\dfrac{3}{x} = -11$ | b) $\dfrac{-7}{x} = 2$ | c) $\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{5}{3}$
2. Déterminer l'antécédent par la fonction inverse des nombres suivants :
   a) 12 | b) $\dfrac{-2}{7}$ | c) 10^3

■ **Exemple 8.9** — **Utiliser le sens de variation de la fonction inverse.**

Encadrer au mieux $\dfrac{1}{a}$ dans les cas suivants.

1. Si $2 < a \leqslant \dfrac{7}{3}$
   $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{3}{7}$ — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$
2. Si $\dfrac{2}{3} \leqslant a$
   $\dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{1}{a} > 0$ — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$ *et préserve le signe*
3. Si $0 < a \leqslant \dfrac{3}{4}$
   $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{4}{3}$ — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$
4. Si $a \leqslant \dfrac{3}{4}$
   $a < 0$ ou $0 < a \leqslant \dfrac{3}{4}$ — *disjonction des cas* $a > 0$ *et* $a < 0$
   $\dfrac{1}{a} < 0$ ou $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{4}{3}$ — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$ *et sur* $]-\infty;0[$ *et préserve le signe*

Exercice 8.22

1. Compléter pour encadrer au mieux $\dfrac{1}{a}$.
   a) Si $-10 < a < -2$
   .... $\dfrac{1}{a}$ .... — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* ....
   b) Si $a \leqslant -\dfrac{2}{3}$
   .... $\dfrac{1}{a}$ .... — $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* .... *et préserve le signe*

c) Si
$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{4}{3} \leqslant a < 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{1}{a} \ldots\ldots \end{array}\right) x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) Si
$$\left.\begin{array}{c} a > -2 \\ a > 0 \quad \text{ou} \quad 0 > a > -2 \end{array}\right) \text{disjonction des cas } a>0 \text{ et } a<0$$
$$\left.\begin{array}{c} a > 0 \quad \text{ou} \quad 0 > a > -2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \text{ou} \quad \dfrac{1}{a} \ldots\ldots\ldots \end{array}\right) x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et préserve le signe}$$

2. Encadrer au mieux $\dfrac{1}{a}$ dans les cas suivants :

a) $-4 \leqslant x < -1$	c) $3 > a > 0$	e) $a \geqslant -5$
b) $a > 3$	d) $a \leqslant -\frac{2}{3}$	f) $\dfrac{2}{5} < a \leqslant \dfrac{7}{8}$

3. Sachant que $a > 2$, montrer que $1 < 2 - \dfrac{4}{a+3} < 2$.
4. Sachant que $5 < a < b$, montrer que $2 > 1 + \dfrac{6}{a+1} > 1 + \dfrac{6}{b+1}$.
5. Sachant que $a < b < -1$, montrer que $1 - \dfrac{4}{a-3} < 1 - \dfrac{4}{b-3} < 2$.

■ Exemple 8.10 — Résoudre équations et inéquations en isolant $\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x} > 5$$
$$0 < x < \frac{1}{5}$$
$$\therefore \mathscr{S} = \left]0; \frac{1}{5}\right[$$

$$\frac{1}{x+1} \leqslant -3$$
$$\left.\begin{array}{rcl} 0 > x+1 & \geqslant & \dfrac{-1}{3} \\ -1 > \quad x & \geqslant & \dfrac{-4}{3} \end{array}\right) -1$$
$$\therefore \mathscr{S} = \left[-\frac{4}{3}; -1\right[$$

$$\frac{1}{x} \geqslant -1$$
$$\frac{1}{x} > 0 \text{ ou } 0 > \frac{1}{x} \geqslant -1$$
$$x > 0 \text{ ou } x \leqslant \frac{1}{-1} = -1$$
$$\therefore \mathscr{S} =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$$

Exercice 8.23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. (I_1) $\dfrac{1}{x} \geqslant 7$	(I_2) $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{3}{2}$	(I_3) $\dfrac{1}{x} < -3$
2. (I_1) $0 > \dfrac{1}{x+3} > -\dfrac{2}{5}$	(I_2) $0 < \dfrac{2}{x-1} \leqslant 2$	(I_3) $\dfrac{4}{5x+1} > 2$
3. (I_1) $\dfrac{1}{x} > -4$	(I_2) $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$	(I_3) $\dfrac{1}{x+3} \geqslant -5$

Exercice 8.24 — synthèse.

Soit la fonction f définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x+5}{x+2}$

1. Montrer que pour tout $x > 2$, $f(x) = 6 - \dfrac{7}{x+2}$.
2. Sachant que $-2 < a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.
3. En déduire le sens de variation de f.