Chapitre 11

Fonctions affines

Table 11.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 11…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**			
Taux de variation de x_1 à x_2 pour une fonction quelconque			
déterminer algébriquement le taux de variation	11.1		
déterminer à partir de la représentation la pente d'un segment ou le taux de variation	11.2, 11.3,		
interpréter le taux de variation	11.4, 11.5		
Représentation graphique de fonctions affines			
représenter une fonction affine $f(x) = mx + c$ où une droite non verticale $\mathscr{D}\colon y = mx + c$ dans le cas $c \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Q}$	11.6, 11.7,		
Problèmes			
Problèmes inversesdéterminer algébriquement l'expression réduite d'une fonction affine ou l'équation réduite d'une droite non verticale		11.8, 11.9	
exploiter l'équation réduite d'une droite pour vérifier l'alignement, les intersections avec les axes du repère ou intersection de droites		11.10, 11.11	
déterminer et exploiter l'expression réduite d'une fonction		11.12 à 11.15	

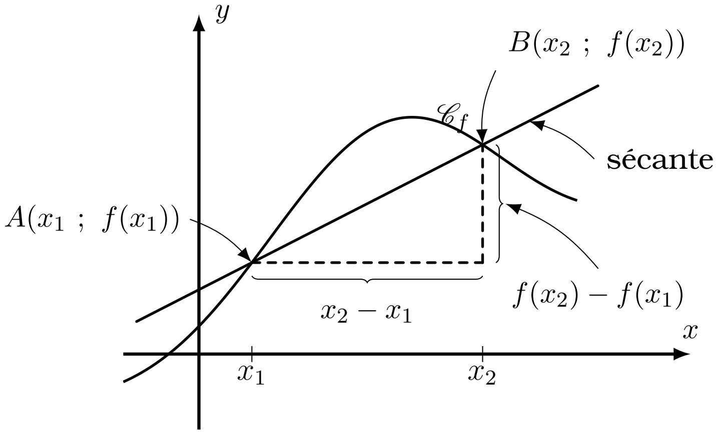
11.1 Préliminaire : taux de variation moyen

Définition 11.1 $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $A(x_1\ ;\ f(x_1))$ et $B(x_2\ ;\ f(x_2)) \in \mathscr{C}_f$ ($x_1 \neq x_2$), La droite (AB) est dite sécante à $\mathscr{C}_f$.

Le *taux de variation* de f de x_1 à x_2, et la *pente de la sécante* (AB) sont donnés par :

$$m_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



■ **Exemple 11.1**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Déterminer algébriquement :

1. Le taux de variation de $x_1 = -2$ à $x_2 = 0$
2. Le taux de variation de $x_1 = -$ à $x_2 = 1$.

solution.

Le taux de variation de $x_1 = -2$ à $x_2 = 0$ est :

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} \\ &= \frac{(0^3 - 3(0)) - ((-2)^3 - 3(-2))}{0 - (-2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le taux de variation de $x_1 = 0$ à $x_2 = 1$ est :

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - (0)} \\ &= \frac{(1^3 - 3(1)) - (0^3 - 3(0))}{1 - 0} \\ &= -2 \end{aligned}$$

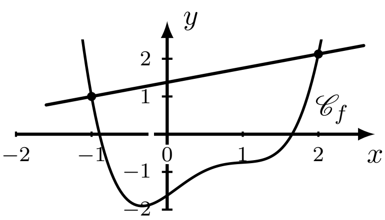
■

■ **Exemple 11.2**

Déterminer graphiquement le taux de varition de f de -1 à 2.

solution.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



■

11.2 Définition algébrique des fonctions affines

Définition 11.2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *affine* s'il existe m et $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + c$$

« mx » est le *terme linéaire* et « c » est le *terme constant*.

Le *terme constant* c est l'*ordonnée à l'origine* de f (c.à.d. l'image de 0 par f) : $f(0) = c$.

Le coefficient m du *terme linéaire* « mx » s'appelle *taux d'accroissement* :

(i) Si $m > 0$ alors f est *strictement croissante*

(ii) Si $m < 0$ alors f est *strictement décroissante*

(iii) Si $m = 0$ alors f est constante.

R Pour une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$:

— Si $m \neq 0$ et $c = 0$, la fonction est dite *affine et linéaire* non nulle : $f(x) = mx$.

— Si $m = 0$ et $c \neq 0$, la fonction est dite *affine et constante* non nulle : $f(x) = p$.

— Si $m = 0$ et $c = 0$, la fonction est dite *fonction nulle* (affine, linéaire et constante).

Propriété 11.1

Pour une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$:

$$\text{Pour tout } x_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{R} \text{ on a} \qquad \begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= m(x_1 - x_2) \\ \underbrace{y_1 - y_2}_{\Delta y} &= m\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\Delta x} \end{aligned}$$

Les variations de l'image Δy sont proportionnelles aux variations de l'antécédent Δx.

Corollaire 11.2 — taux d'accroissement = taux de variation.

Pour une fonction affine, le taux de variation entre tous réels $x_1 \neq x_2$ est égal au taux d'accroissement.

Plus précisément, pour une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$:

$$\text{Pour tout } x_1 \neq x_2 : \qquad m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

11.3 Représentations graphiques de fonctions affines

Théorème 11.3 — admis. La *droite non verticale* $\mathscr{D}_f : y = mx + c$ est la représentation graphique de la fonction affine f de taux de variation m et de terme constant c.

— « $y = mx + c$ » est *l'équation réduite* de $\mathscr{C}_f$.

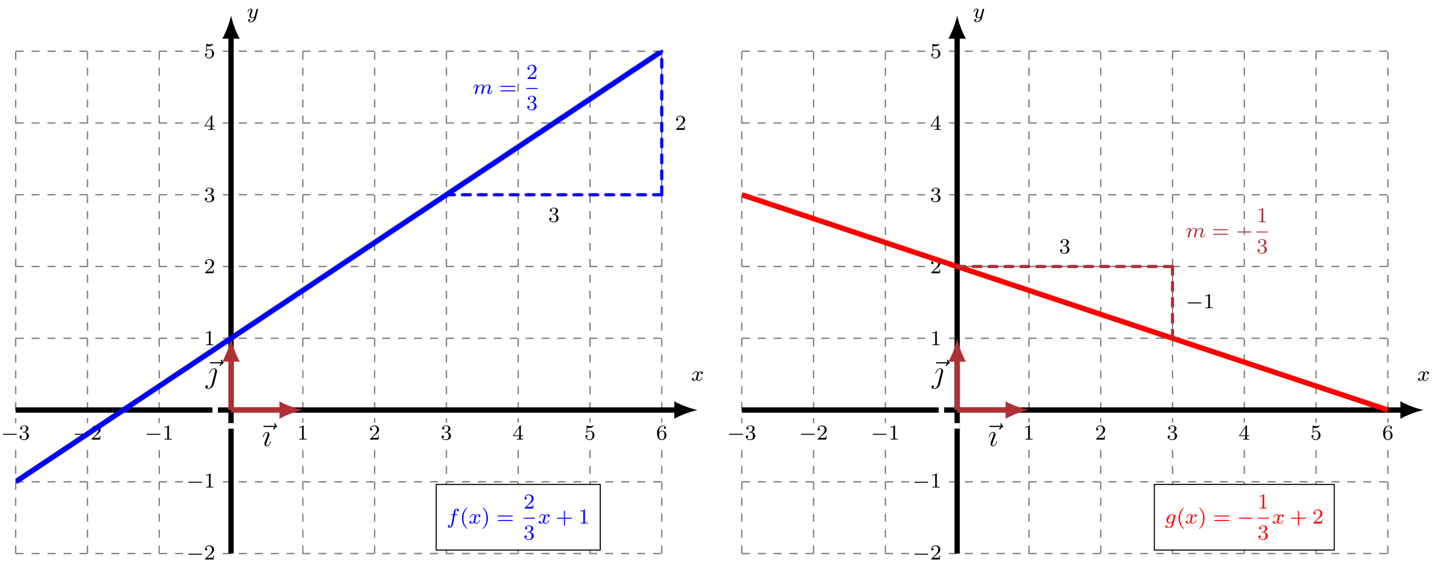
— m est *la pente* de D_f : c'est la pente de tout segment $[AB]$ avec $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B) \in \mathscr{D}_f$:

$$m = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad x_A \neq x_B$$

— c est l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}_f$: $P(0\ ;\ c) \in \mathscr{D}_f$.

R Dans la formule de la pente, ou du taux de variation, l'ordre des soustraction est important :

$$\underbrace{m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}_{\text{correct}} \quad \text{où} \quad \underbrace{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}_{\text{correct}} \quad \text{mais} \quad \underbrace{\cancel{m = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}}}_{\text{incorrect}} \quad \text{ni} \quad \underbrace{\cancel{m = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}}}_{\text{incorrect}}$$



x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$	↗	0	1	↗
signe de f	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$
$g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$	↘	2	0	↘
signe de g	$+$		0	$-$

Figure 11.1 – $c = f(0)$ est l'image de 0 ou encore l'ordonnée à l'origine.
m est le taux d'accroissement de la fonction affine f. Il permet de déterminer le sens de variation de la fonction f.
Graphiquement, m est la pente de la droite non verticale représentant f. C'est le rapport de l'augmentation verticale sur l'augmentation horizontale.

R Dans le cas particulier d'une fonction linéaire, $y = f(x) = mx$, on peut aussi affirmer que l'image y qui est proportionnelle à l'abscisse x, et $m = \frac{y}{x}$ pour $x \neq 0$. La représentation graphique passe par l'origine $O(0\ ;\ 0)$ du repère.

11.4 Exercices

Exercice 11.1 — **taux de variation.**

Déterminer pour chaque fonction donnée par son expression, le taux de variation de x_1 à x_2.

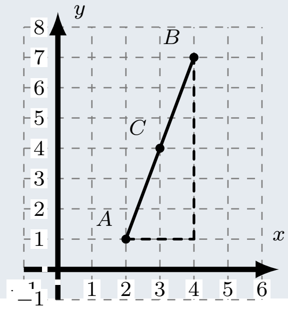
1. $f(x) = -2x + 15$, avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$
2. $f(x) = 3x + 8$, avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$
3. $f(x) = x^2 + 12x - 4$, avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$
4. $f(x) = x^2 - 2x + 8$, avec $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$, avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$
6. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x$, avec $x_1 = -1$ et $x_2 = 6$
7. $f(x) = 5 - \sqrt{x-2}$, avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 11$
8. $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$, avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 8$

■ **Exemple 11.3 — déterminer graphiquement la pente d'un segment ou d'une droite.** La pente de la droite (AB) est donnée par

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-1}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

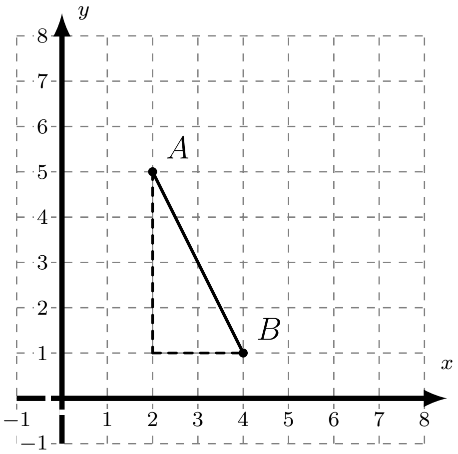
On peut aussi utiliser les points A et C :

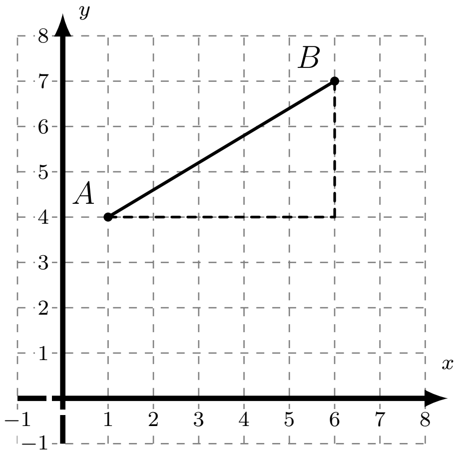
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-1}{3-2} = 3$$

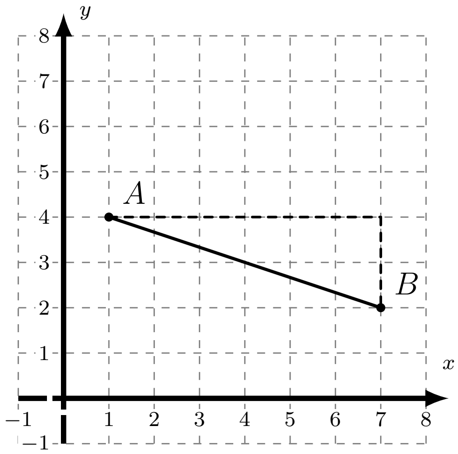


Exercice 11.2

Déterminer par lecture graphique les pentes des segments $[AB]$ ci-dessous.

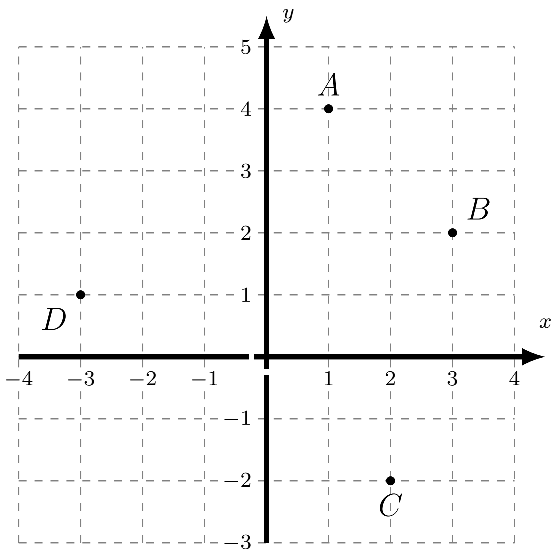






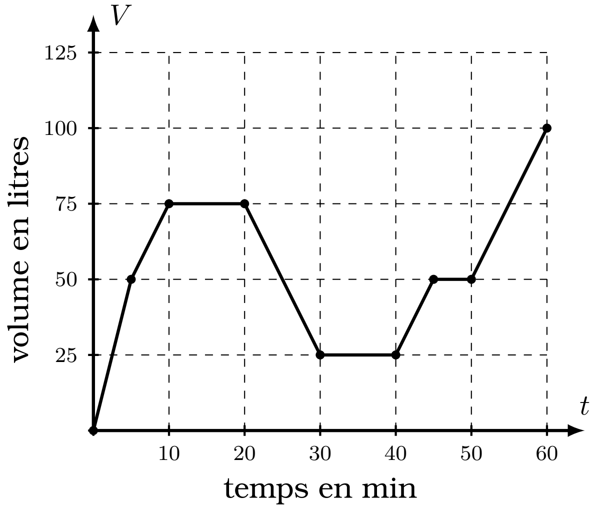
Exercice 11.3

1. Déterminer les pentes des segments :
   a) $[AB]$ b) $[DB]$ c) $[BC]$
   d) $[AC]$ e) $[DC]$ f) $[AD]$
2. Tracer les droites suivantes :
   a) droite passant par A de pente 3
   b) droite passant par B de pente $\frac{5}{3}$
   c) droite passant par C de pente -1
   d) droite passant par D de pente $-\frac{1}{3}$



Exercice 11.4

Le graphe ci-contre représente le volume d'eau dans une citerne de récupération en fonction du temps.



1. Déterminer le taux de variation du volume de 10 min à 20 min. Interprétez le résultat.
2. Déterminer les taux de variation :
   a) de 0 min à 5 min b) de 5 min à 10 min
   c) de 40 min à 45 min d) de 50 min à 60 min.
3. Donner l'intervalle de temps pendant lequel la citerne se remplit le plus rapidement.
4. Déterminer le taux de variation de 20 min à 30 min.

Exercice 11.5

Ci-dessous est représentée la distance séparant Naomi de la maison durant une promenade. On s'interresse aux différents segments du trajet.

1. Donner le taux de variation de 12 h à 13 h, puis de 14 h à 15 h. Sur lequel de ces deux segments le déplacement était le plus rapide ?
2. Sur quel segment le taux le taux de variation est nul ? négatif ? Interprétez cela dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer le taux de variation sur le dernier segment de trajet.

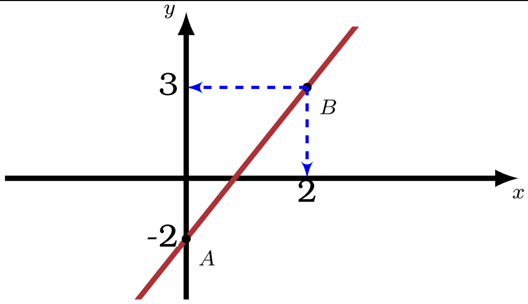
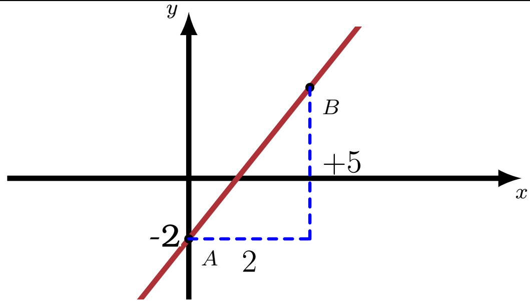
Une fonction affine $f(x) = mx + c$ est représentée par la droite non verticale d'équation réduite.

Pour tracer $\mathscr{D} : y = mx + c$, deux points suffisent pour déterminer l'équation réduite de la droite.

■ **Exemple 11.4 — représenter des fonctions affines avec $c \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Q}$.**

Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{2}x - 2$

solution.

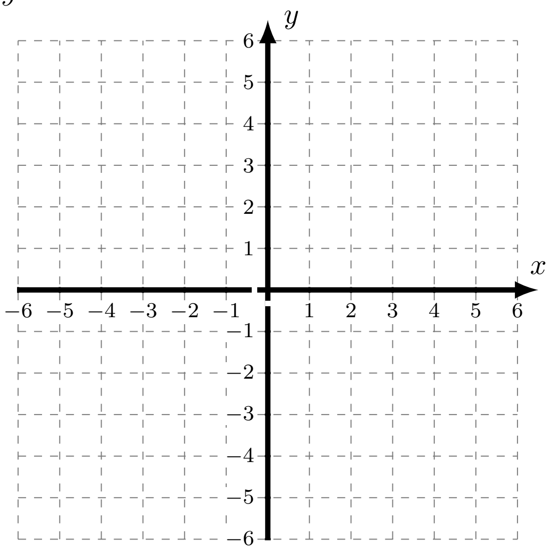
Méthode 1	**Méthode 2**
Ordonnée à l'origine est -2 : $A(0\ ;\ -2) \in \mathscr{D}$	
Pour $x = 2$, $y = \frac{5}{2}(2) - 2 = 3$. $\therefore B(2\ ;\ 3) \in \mathscr{C}$ *on cherchera des points à coordonnées entières, afin que leur placement soit le plus précis*	$m = \dfrac{5}{2} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *En partant de* $(0\ ;\ -2)$ *on se déplace de* 2 *vers la droite, et* 5 *vers le haut pour trouver un autre point de* $\mathscr{D}$
	

■

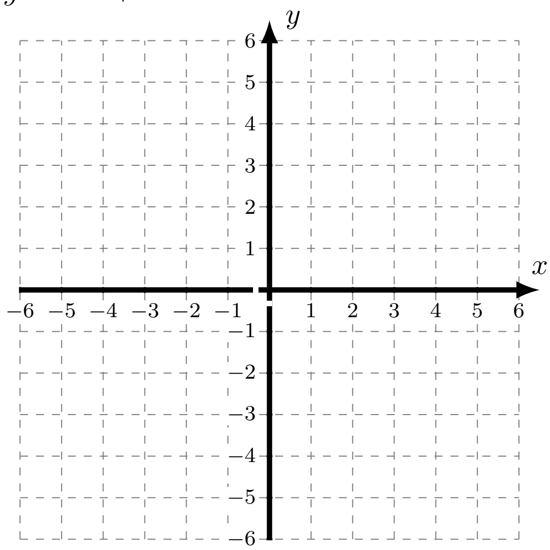
Exercice 11.6

Représenter les droites non verticales données par leur équations réduites.

1. $y = x$ $\qquad m = \ldots$ et $c = \ldots$



2. $y = -x + 4$ $\qquad m = \ldots$ et $c = \ldots$

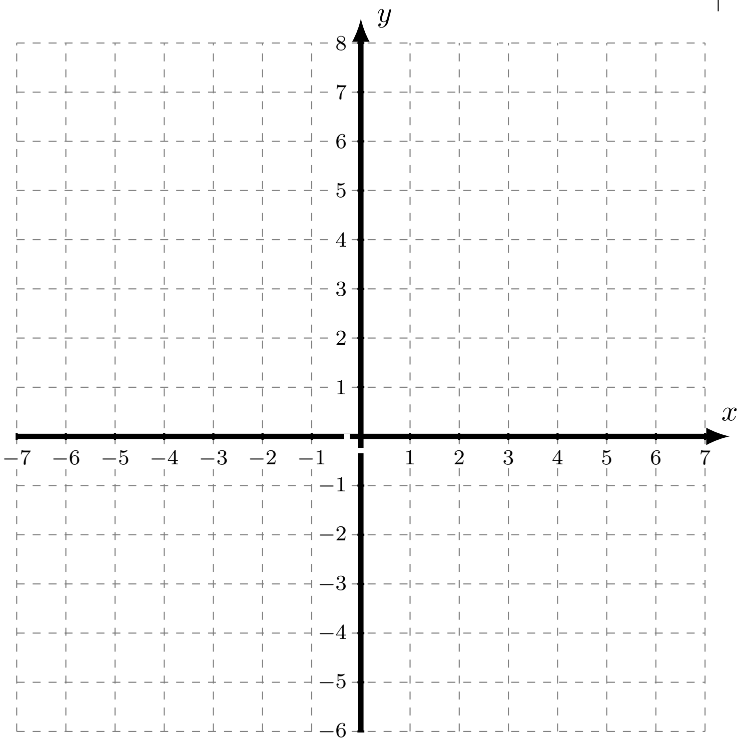


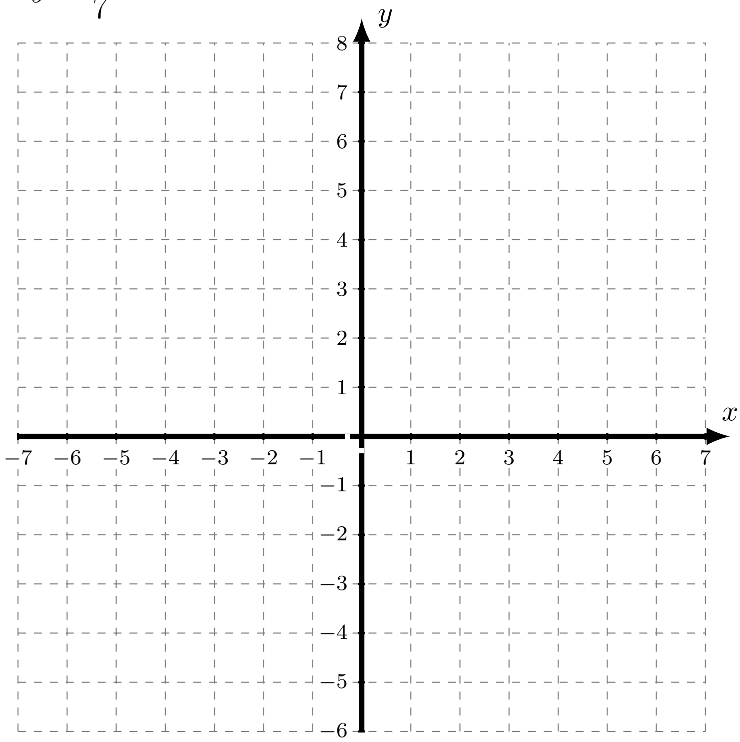
3. $y = -\frac{2}{3}x + 4$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

4. $y = -2$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

5. $y = -\frac{3}{2}x - 2$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

6. $y = \frac{1}{7}x - 4$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$



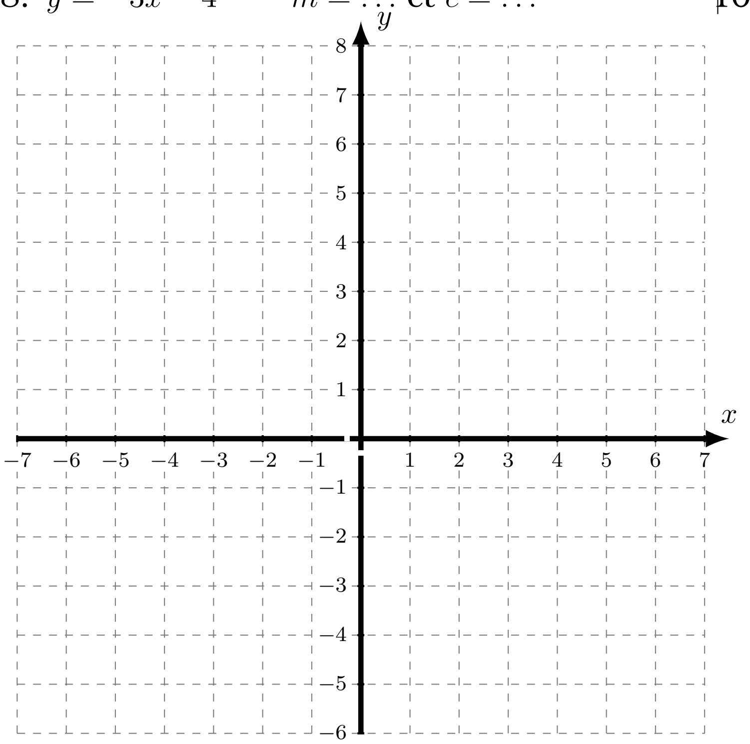


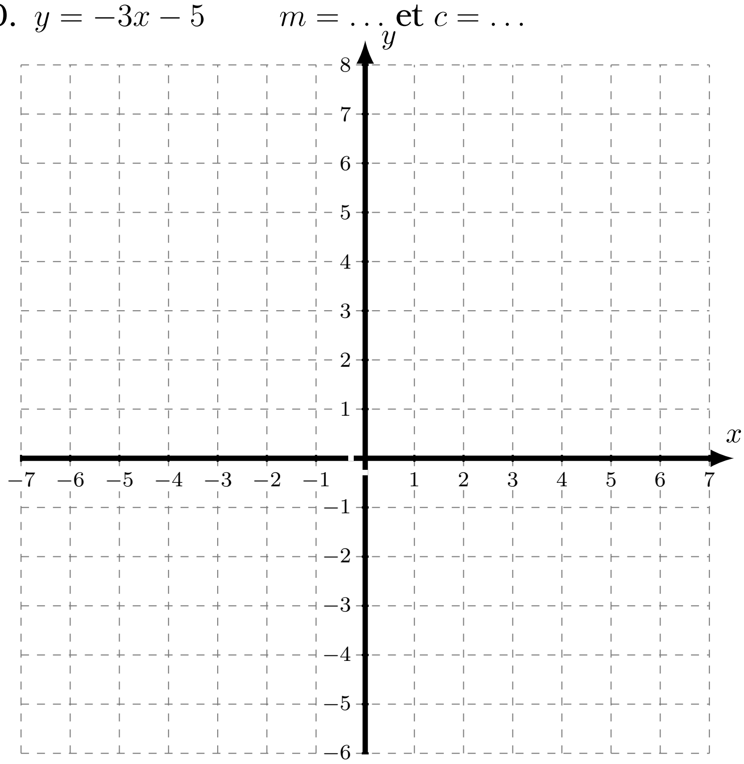
7. $y = \frac{3}{7}x + 5$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

8. $y = -3x - 4$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

9. $y = -\frac{3}{7}x + 6$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

10. $y = -3x - 5$ $\quad m = \dots$ et $c = \dots$

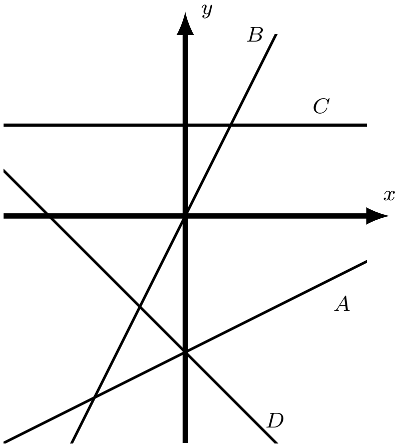




Exercice 11.7

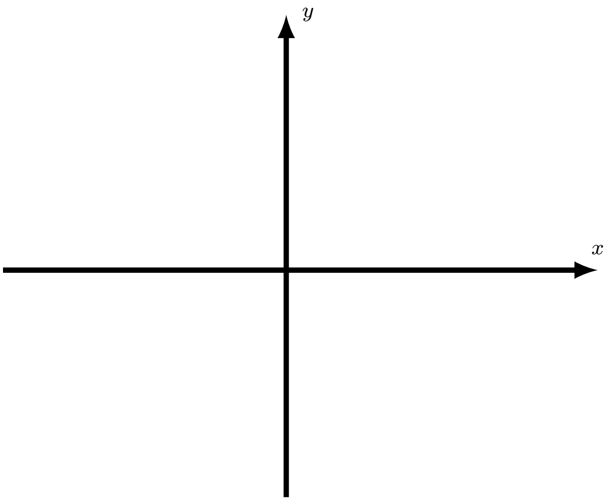
1. Associer les droites représentées avec la bonne ligne du tableau et donner l'équation réduite.

droite	**pente**	**ordonnée à l'origine**	**équation réduite**
	2	0	
	$\frac{1}{2}$	-3	
	-1	-3	
	0	2	



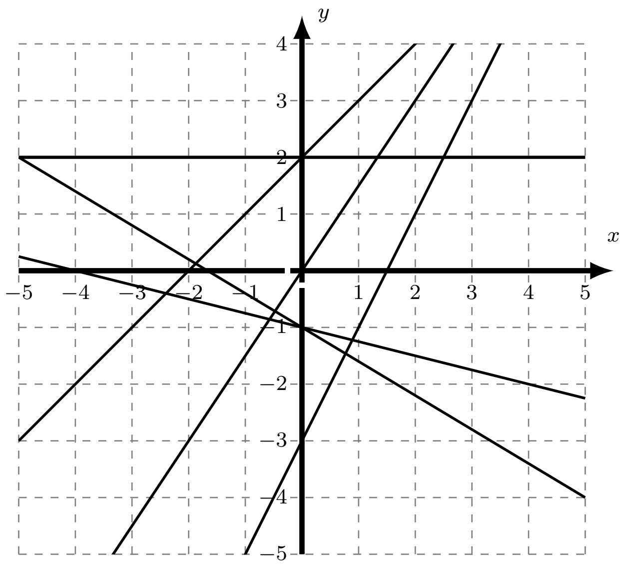
2. Compléter le tableau puis tracer à main levée les droites décrites et donner l'équation réduite :

droite	**pente**	**ordonnée à l'origine**	**équation réduite**
A	2	-1	
B	-2	3	
C	1	2	
D	0	-2	



3. Compléter le tableau puis associer les droites données par leur équation réduite à leur représentation :

droite	**pente**	**ordonnée à l'origine**	**équation réduite**
A			$y = 2x - 3$
B			$y = 2$
C			$y = x + 2$
D			$y = \frac{3}{2}x$
E			$y = -\frac{3}{5}x - 1$
F			$y = -\frac{1}{4}x - 1$



■ **Exemple 11.5 — problème inverse : déterminer l'expression réduite d'une fonction affine.**

1. Déterminer la forme réduite de la fonction affine tel que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$.
2. Déterminer l'expression réduite de la fonction linéaire telle que $g(3) = -4$.

solution.

Étape	**Explications**
f est affine, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = mx + c$	*On connait la forme de la fonction*
$m = \dfrac{f(12) - f(16)}{12 - 16} = \dfrac{17 - 25}{12 - 16} = \dfrac{-8}{-4} = 2$	*Déterminer le taux de variation* m *en calculant le taux de variation de* 12 *à* 16
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(12) = m(x - 12)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(16) = m(x - 16)$	*La variation des images est proportionnelle à la variation des abscisses*
$f(x) - 17 = m(x - 12)$ ou $f(x) - 25 = m(x - 16)$ $f(x) = 2(x - 12) + 17$ $f(x) - 25 = 2(x - 16)$ $f(x) = 2x - 24 + 17$ $f(x) = 2x - 7$ $f(x) = 2x - 7$	*déterminer l'expression réduite*

Étape	**Explications**
f est linéaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = mx$	Linéaire, donc $f(0) = 0$
$m = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{-4 - 0}{3 - 0} = \dfrac{-4}{3}$	*Déterminer le taux de variation* m *en calculant le taux de variation de* 0 *à* 3
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(0) = m(x - 0)$	*La variation des images est proportionnelle à la variation des abscisses*
$f(x) = -\dfrac{4}{3}x$	*déterminer l'expression réduite*

■

Exercice 11.8

Déterminez l'expression réduite de la fonction affine f dans les cas suivants :

1. le taux de variation est $\frac{1}{3}$ et $f(15) = 3$.
2. le taux de variation est $\frac{-1}{2}$ et $f(-16) = \frac{11}{2}$.
3. f est linéaire et $f(5) = 2$.
4. $f(-8) = 12$ et f est linéaire.
5. f est constante et $f(3) = 1$.
6. $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$.
7. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$.
8. $f(2) = -5$ et $f(7) = 3$.

■ **Exemple 11.6 — équation réduite d'une droite.**

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) où $A(2\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;\ 7)$
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (CD) où $C(-2\ ;\ 1)$ et $D(-2\ ;\ 5)$

solution.

Étape	**Explications**
$x_A \neq x_B$, la droite est non verticale.	*Vérifier si la droite est verticale*
$m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{3-7}{2-4} = \dfrac{-4}{-2} = 2$	*calcul de la pente de la droite*
$(AB)\colon y - y_A = m(x - x_A)$ ou $(AB)\colon y - y_B = m(x - x_B)$	*La variation des ordonnées est proportionnelle à la variation des abscisses*
$y - 3 = 2(x-2)$ ou $y - 7 = 2(x-4)$ $y = 2(x-2)+3$ $y = 2(x-4)+7$ $y = 2x-4+3$ $y = 2x-8+7$ $(AB)\colon y = 2x-1$ $(AB)\colon y = 2x-1$	*déterminer l'équation réduite*

Étape	**Explications**
$x_C \neq x_D$	*la droite est verticale (pas de pente)*
$(CD)\colon x = -2$	*équation réduite de la forme $x = c$*

■

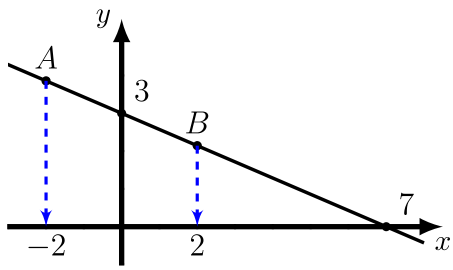
Exercice 11.9

Déterminer dans chaque cas l'équation réduite de la (AB) :

1. $A(0\ ;\ 2)$ et $B(-1\ ;\ 1)$.
2. $A(0\ ;\ -4)$ et $B(2\ ;\ 0)$.
3. $A(1\ ;\ -4)$ et $B(4\ ;\ 2)$.
4. $A(2\ ;\ -1)$ et $B(-2\ ;\ 2)$.
5. $A(-5\ ;\ 1)$ et $B(-5\ ;\ 1)$.
6. $A(3\ ;\ 5)$ et $B(5\ ;\ 11)$.

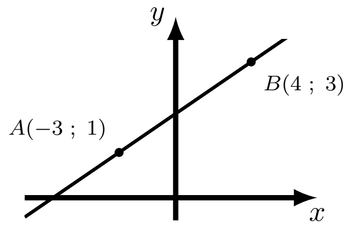
Exercice 11.10

Les points A, B, $C(0\ ;\ 3)$ et $D(7\ ;\ 0)$ sont alignés.



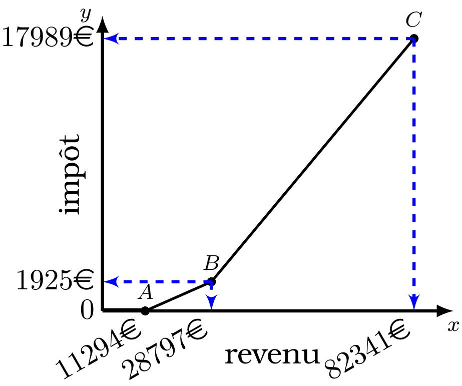
1. Déterminer l'équation réduite de la droite (CD).
2. En déduire les coordonnées exactes de A et B.
3. Les points A, B et $E(-100\ ;63)$ sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 11.11



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
2. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) ?
3. Déterminer les coordonnées de l'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses.

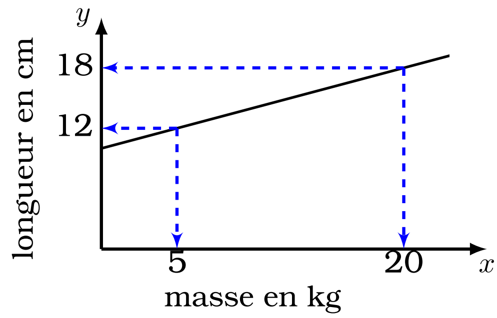
Exercice 11.12 — **impots sur les revenus.**



Pour le calcul de l'impôt sur les revenus 2023, les revenus sont considérés tranche par tranche. Le montant des impôts en fonction des revenus est représentés ci-contre.

1. Donner les coordonnées de A. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
2. Déterminer les pentes des segments $[AB]$ et $[BC]$.
3. Quelle tranche d'imposition correspond à un revenu annuel de 25 000 €?
4. Vrai ou faux? Affirmation « Pour un revenu de 30 000 €, l'impôt est à 30% du revenu ».

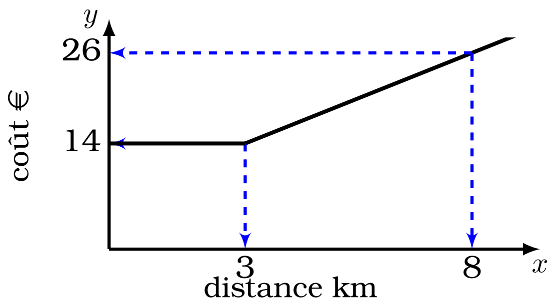
Exercice 11.13



La relation entre la longueur y cm d'un ressort et la masse $x$kg d'un objet qui y est suspendu est une fonction affine représentée ci-dessous.

1. Déterminer l'expression réduite de y en fonction de x.
2. Quelle est la longueur du ressort au repos?
3. Quelle masse faut-il suspendre pour que la longueur du ressort soit de 15 cm?

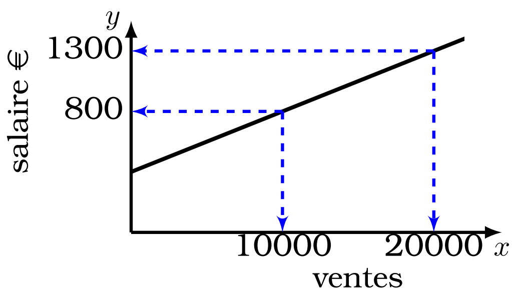
Exercice 11.14



La relation entre le coût y € d'un taxi en fonction de la distance x km parcourue et représentée ci-dessous.

1. Pour $x \geqslant 3$, déterminer l'expression réduite de y en fonction de x.
2. Quel est le prix pour un trajet de 2,5 km? de 13 km?
3. Quelle est la longueur maximale du trajet que l'on peut faire avec 30,80 €.

Exercice 11.15



Le salaire y € des commerciaux d'une entreprise en fonction des ventes réalisées x (par dizaines de milliers) est représentée ci-contre.

1. Déterminer l'expression réduite de y en fonction de x.
2. Quel est le salaire d'un commercial qui ne réalise aucune vente?