SECONDE GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Année 2024-2025

Mathématiques

Devoir surveillé n° 3 - Mardi 11 mars 2025

Durée de l'épreuve : **1 h 45 min**

L'usage de la calculatrice avec ou sans mode examen est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat doit traiter les 4 exercices proposés.
Le candidat bénéficiant d'un tiers temps ne traitera pas les questions marquées par le repère $\boxed{\textbf{TT}}$

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : Un QCM sans justifications

10 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

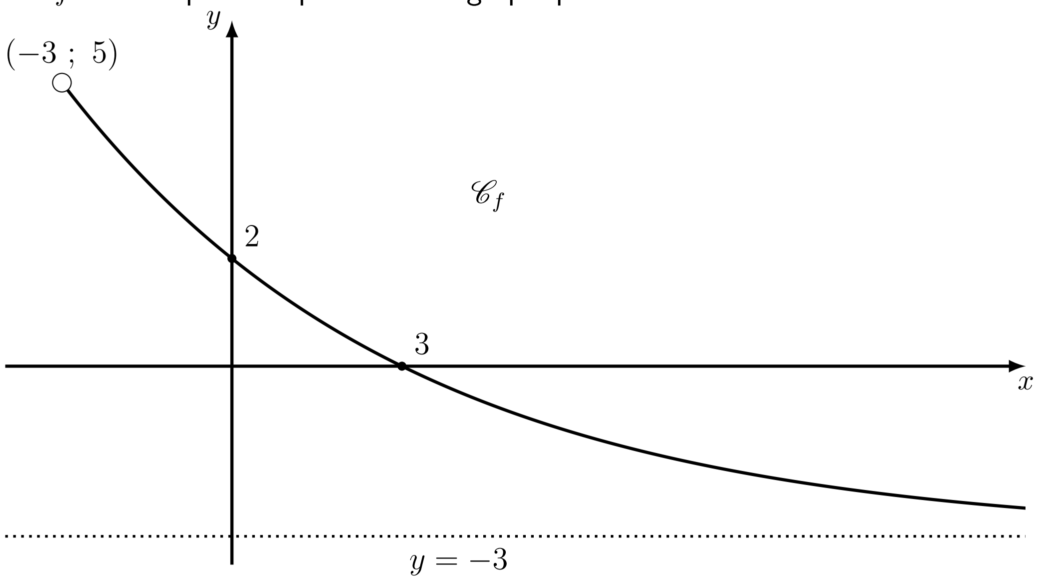
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Les questions sont indépendantes.

Partie A : à partir d'une représentation graphique

Soit la fonction f donnée par sa représentation graphique ci-dessous :



1. Le domaine de f est :

   Réponse A : $]-\infty;+\infty[$

   Réponse B : $]5;+\infty[$

   Réponse C : $]-3;5[$

   Réponse D : $]-3;+\infty[$

2. L'ordonnée à l'origine de f est

   Réponse A : 2

   Réponse B : 3

   Réponse C : 0

   Réponse D : on ne peut pas savoir

3. On peut affirmer que :

   Réponse A : $f(5) = -3$

   Réponse B : $f(2) = 0$

   Réponse C : $f(3) = 0$

   Réponse D : $f(-3) = 5$

4. $\boxed{\text{TT}}$ On peut affirmer que :

   Réponse A : $f(1) > 3$

   Réponse B : $f(-1) < f(-3)$

   Réponse C : $f(2) > 2$

   Réponse D : $f(5) < f(4)$

Partie B : à partir d'un tableau de variation

Soit la fonction g dont le tableau de variations est le suivant :

x	-10		$-3{,}5$		1		2		4		8
$g(x)$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\Vert$

1. Le domaine de g est :

   Réponse A : $[-10;8]$

   Réponse B : $[-10;8[$

   Réponse C : $[-5;0]$

   Réponse D : $[-5;+\infty[$

2. On peut dire que :

   Réponse A : $g(3) < -3$

   Réponse B : $g(0) \geqslant 1$

   Réponse C : $g(5) > 4$

   Réponse D : $g(-5) > -5$

3. $\boxed{\text{TT}}$ On peut affirmer que :

   Réponse A : $g(-4) > g(-5)$

   Réponse B : $g(0) > g(1)$

   Réponse C : $g(-1) > g(-2)$

   Réponse D : $g(-3) < g(3)$

4. $\boxed{\text{TT}}$ On peut affirmer que :

   Réponse A : $g(0{,}9) = g(1{,}1)$

   Réponse B : $g(0{,}9) < g(4{,}1)$

   Réponse C : $g(-4) < g(3)$

   Réponse D : $g(-4) > g(3)$

5. On peut affirmer que l'équation $g(x) = -1$ admet :

   Réponse A : aucune solution

   Réponse B : une solution unique

   Réponse C : exactement deux solutions

   Réponse D : exactement trois solutions

6. $\boxed{\text{TT}}$ L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > 0$ d'inconnue x est :

   Réponse A : $]4;8[$

   Réponse B : $]4;+\infty[$

   Réponse C : $[4;8[$

   Réponse D : $]0;+\infty[$

Exercice 2 : Fonctions affines

10 points

(1) 1. Parmi les expressions suivantes cochez celles qui correspondent à des fonctions affines :

☐ $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{5}$

☐ $f(x) = \sqrt{2x} + 3$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{-7x+8}$

☐ $f(x) = 3x^2 - 1$

☐ $f(x) = -2x + 4$

(1) 2. Cocher les expressions de fonctions *affines* pour lesquelles l'image de 5 est 1 :

☐ $f(x) = -7x + 12$

☐ $f(x) = -2x + 7$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{5}x$

☐ $f(x) = x + 5$

☐ $f(x) = \dfrac{2x-8}{x-3}$

☐ $f(x) = \dfrac{-3x+22}{7}$

(1) 3. $k \in \mathbb{R}$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (k-2)x^2 - (k+3)x + 2k - 1$.

Déterminer la valeur de k pour laquelle f est une fonction affine, et préciser alors son expression réduite.

(1,5) 4. Ci-dessous est le tableau de signe d'une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

On peut dire que

☐ $f(2) = 0$

☐ $f(0) = 2$

☐ $m > 0$

☐ $m < 0$

☐ $c < 0$

☐ $c > 0$

(2) 5. Déterminer le zéro et construire le tableau de signe de chacune des fonctions affines suivantes :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{3}x - 2$

b) $\boxed{\text{TT}}$ g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{2}{5}x + 1$

(1,5) 6. f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$ tel que $f(-2) = -1$ et $f(3) = 1$.

Déterminer un système d'équations vérifiées par m et c et en déduire l'expression de f.

(2) 7. $\boxed{\text{TT}}$ h est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 7 - 3x$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier $h(2x-1)$

b) Déterminer x tel que $h(2x-1) = -2$

Exercice 3 : Une fonction quadratique **10 points**

Soit la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{4}(x-2)^2 + 4{,}5$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

(0,5) 1. Donner le domaine de définition D de la fonction f.

(1,25) 2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Donner les valeurs exactes et les approchées à 10^{-2} près.

(1) Interprétez graphiquement les valeurs obtenues.

(1) 3. Aider vous de la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs donné en annexe.

Vous donnerez les valeurs arrondies à 10^{-2} près si nécessaire.

(1,25) 4. Tracer sur le repère donné en annexe, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

Vous indiquerez les intersections avec les axes du repère et les coordonnées de l'extremum.

(1) 5. Construire le tableau de variation de la fonction f.

(1) 6. Construire le tableau de signe de la fonction f.

7. La fonction affine g est représentée par la droite non verticale D_g.

(0,5) a) Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les solutions de $f(x) = g(x)$.

(0,5) b) Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$.

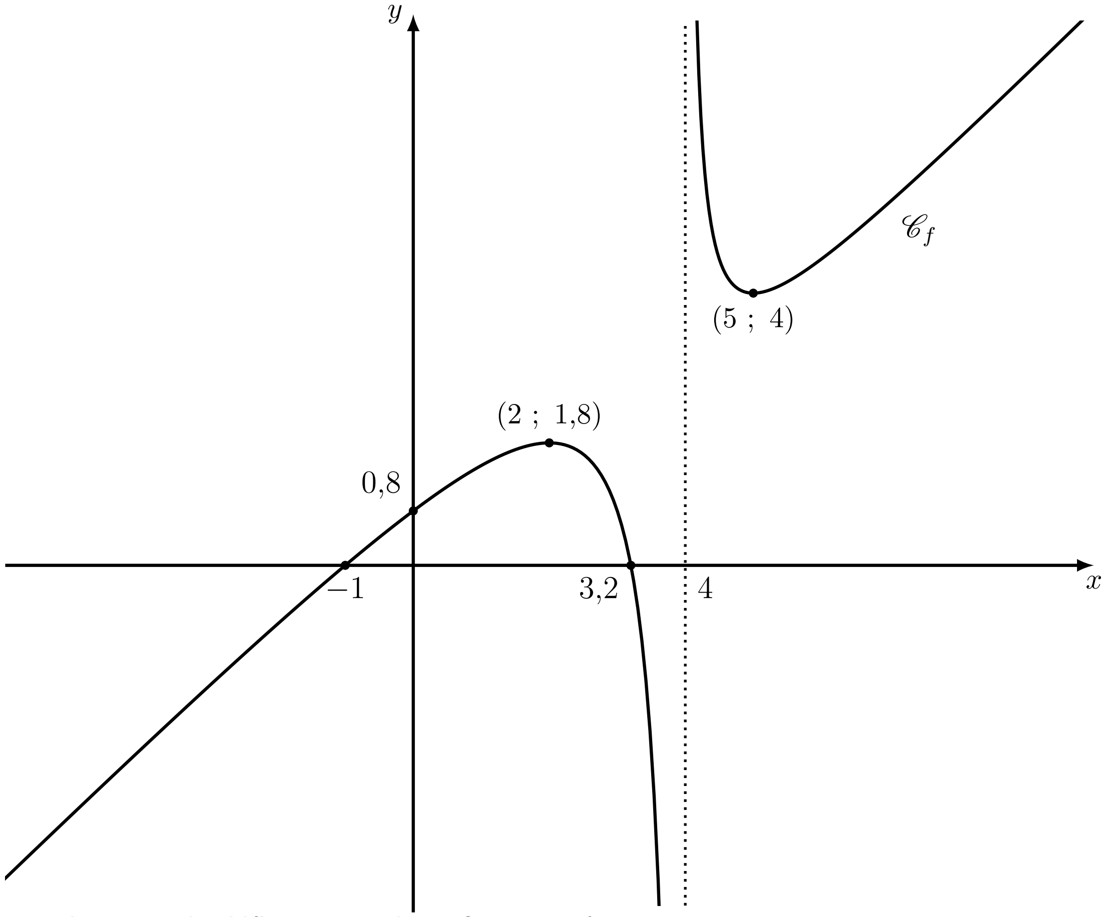
8. Soit la fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - 0{,}5$.

(2) Résoudre l'équation $f(x) = h(x)$, d'inconnue x.

Vous justifierez que l'équation est équivalente à $\dfrac{1}{4}x^2 = 4$.

Exercice 4 — 10 points

Soit la fonction f définie par la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-dessus :



(1) 1. Donner le domaine de définition D de la fonction f.

(1) 2. Déterminer par lecture graphique $f(0)$.

(1) 3. Résoudre par lecture graphique l'équation $f(x) = 0$.

(1,5) 4. Construire le tableau de signe de la fonction f.

(0,5) 5. Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]4;+\infty[$? Pour quelle valeur est-il atteint ?

(1,5) 6. Construire le tableau de variation de la fonction f.

(0,5) 7. Pour quelles valeurs du réel k l'équation $f(x) = k$ admet-elle une solution unique ? n'a pas de solutions ?

(1) 8. Dans cette question nous admettons que pour tout $x > 4$, $f(x) = x + a + \dfrac{1}{x-4}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer une équation vérifiée par a et la résoudre.

9. $\boxed{\text{TT}}$ Dans cette question nous admettons que pour tout $x < 4$, $f(x) = \dfrac{-5x^2 + 11x + 16}{20 - 5x}$.

(1,5) a) Résoudre pour $x \in]-\infty;4[$ l'équation $f(x) = -\dfrac{11}{5}$, d'inconnue x.

Vous justifierez que l'équation est équivalente à $x^2 = 12$

(0,5) b) En déduire, sans calculs supplémentaires, les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -\dfrac{11}{5}$.

Annexe de l'exercice 3

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$